北海道教育大学紀要（教育臨床研究編）第73巻　第１・２号　令 和 5 年 1 月
Journal of Hokkaido University of Education（Clinical Research in Education）Vol. 73, No.1, 2　January, 2023

教科内容科目『初等算数』の授業改善に向けてⅠ

齋藤　幸子・小室　直人・谷地元直樹・辻栄　周平・植田　優基

北海道教育大学旭川校数学教育専攻

Toward Improving Classes in the Content Subject “Mathematics in Elementary School” Ⅰ

SAITO Sachiko, KOMURO Naoto, YACHIMOTO Naoki, TSUJIE Shuhei, and UEDA Yuki

Department of Mathematics Education, Asahikawa Campus, Hokkaido University of Education

概　要

算数・数学科における公式暗記に頼った指導法や，算数におけるかけ算の順序の指導などに対し，近年，多くの問題点が指摘されている。このような問題に数学的・論理的に対処できる教員を養成するにあたり，大学教職課程での算数・数学の“教科内容科目”の責任は重大である。北海道教育大学の「教科に関する専門的事項（小学校）」（教科内容科目）『初等算数』において，旭川校では，令和３年度から数学教育専攻の複数の教員によるオムニバス形式の授業を開始した。この小論では，旭川校令和３年度『初等算数』における授業改善およびその根拠・ねらいについて論じる。学生達が将来小学校で算数を指導するための基礎となる題材を厳選しつつ教科専門教員の強みを活かすような授業内容の工夫について述べ，今後の課題も提示する。特に，６章では，学習指導要領において重視されている「データの活用」と「確率・統計」について専門教員の見解を述べる。

1　初めに　～『初等算数』のシラバス～

平成31年（2019年）4月1日，教育職員免許法の改正（平成28年11月）及び同法施行規則の改正（平成29年11月）が施行となった（文部科学省 https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/kyoin/1414533.htm 参照）。その際，**「教職課程コアカリキュラム」**が設定された。「教職課程コアカリキュラム」における**「教科及び教科の指導法に関する科目」**は，**「教科に関する専門的事項」**[1] と**「各教科の指導法」**で構成される。

この小論では，北海道教育大学 教員養成課程のカリキュラムにおける**「教科に関する専門的事項（小学校）」**群の科目である**『初等算数』**に関して，北海道教育大学教育学部旭川校の担当教員が令和3年度に行った授業改善について報告する。『初等算数』は2単位（90分授業 ×16回）の科目である。 平成31年度以降の入学生に対する旭川校の履修基準については，学生便覧 [1] 第4章を参照されたい。

[1]　「教科に関する専門的事項」は，近年“教科内容”と呼ばれているものに相当する。

旭川校では『初等算数』を３年次に履修し，**AH, BCD，EFG** の３クラスに分けて授業を行っている。AH クラスは教育発達専攻と芸術・保健体育教育専攻，BCD クラスは国語教育専攻，英語教育専攻，社会科教育専攻，EFG クラスは数学教育専攻，理科教育専攻，生活・技術教育専攻の学生たちからなる。

まず，旭川校**『初等算数』**のシラバス（令和４年度[2]）から，(i) **科目区分**，(ii) **授業概要**，(iii) **到達目標**，(iv) **授業計画**を引用する：

(i) **科目区分**　「教科に関する専門科目」　小学校又は中学校の各教科の目的や児童生徒の発達特性を踏まえた教科内容の理解と，各教科内容を教えるのに必要な知識や技能の系統的な理解を図ることを目的とする。

(ii) **授業概要**　受講者が将来小学校で算数を指導することを念頭におき，算数科の中でも特に根本的・基本的で重要なテーマを選び，関連する事項・仕組み・背景について内容を掘り下げて理解する。

(iii) **到達目標**

(1) 自然数，整数，有理数，実数など，数の基本的性質を理解する。

(2) 分数や小数を含む四則演算について理解する。

(3) 割合の考え方を明確に理解し，日常生活での応用についても知る。

(4) 面積や体積を求める原理を理解する。

(5) 資料の整理，データの活用の基本を学ぶ。統計・確率の考え方を理解する。

(6) 算数を学ぶ楽しさ・面白さを理解する。

【キャリア発達を促す視点】**[基礎的・汎用的能力]** 教科内容について論じることのできる論理的思考力，教科内容をより楽しく意欲的に学ぶ工夫ができる創造力，小学校の教科内容と中学校以降の教科内容を俯瞰し，課題に対応できる能力を身につける。**[専門的な知識・技能]** 小学校で責任を持って算数を指導するための本質的な知識・技能を身につける。具体的には上記 (1)〜(6)。

[2] 授業担当者の日程上の都合から，令和３年度の授業計画を，日付のみ修正した。

(iv) **授業計画**

週	授業日	担当者	授業内容
第１週	10/04	谷地元	オリエンテーション（『初等算数』を学ぶ意義，日程，成績評価）
第２週	10/11	小室	算数の解析的基礎 1
第３週	10/18	小室	算数の解析的基礎 2
第４週	10/25	小室	算数の解析的基礎 3
第５週	11/01	植田	確率・統計基礎 1 (データの中央値，最頻値，平均，分散)
第６週	11/08	植田	確率・統計基礎 2 (確率の基礎)
第７週	11/15	植田	確率・統計基礎 3 (分布の基礎)
第８週	11/22	植田	確率・統計基礎 4 (大数の法則)
第９週	11/29	齋藤	分数（小数）をかける，分数（小数）で割る
第 10 週	12/06	齋藤	割合，単位量当たりの大きさ
第 11 週	12/13	齋藤	長さ，面積，円の面積
第 12 週	12/20	齋藤	錐の体積，カヴァリエリの原理
第 13 週	12/27		（予備日）
第 14 週	01/17	辻栄	算数の代数的基礎 1
第 15 週	01/24	辻栄	算数の代数的基礎 2
第 16 週	01/31	辻栄	算数の代数的基礎 3

2　『初等算数』に関する過去のアンケート調査の結果

本章では，平成 29 年度（2017 年度）と令和２年度（2020 年度）に『初等算数』の AH クラスと BCD クラスの授業で実施した学生アンケート調査の結果と，そこから読み取れたことについて述べる。まず，平成 29 年度（2017 年度），令和２年度（2020 年度）の『初等算数』（AH, BCD クラス）の授業のねらいと授業内容（扱った話題）は以下のとおりであった：

算数・数学の特性の一つとして，他教科と比べ，それがどのように活用され社会に必要とされているかについて広くは知られていないことが挙げられる。算数の背景となる数学の主要な知識や考え方をわかりやすく伝えること，さらには，数学を学ぶ意義や数学の有用性を具体例を通して伝えることを目標とする。以前のアンケート調査結果から約 64 %が高校までに数学嫌いとなっている AH, BCD クラスの学生に数学の異なるイメージを与えたい。全体を通して中学校数学を超える予備知識は求めず，必要な場合には時間をかけて丁寧に説明する。

[トポロジーの話題] 図形が同相であることの意味を直感的に理解し，同相な図形を区別しない考え方について知る。さらに，その考え方が有効に応用され意味を実感できる具体例を扱う。オイラー標数，図形の穴の数，一筆書き可能性といった例をもとに，位相不変量の考え方にも触れる。**[整数論の話題]** 主に素数に焦点を当てる。電卓を用い大きな素数を探す計算をする中で，その難しさを知る。そのほか，素数の無限性，完全数，メルセンヌ素数，友愛数などを学び，整数の世

界の魅力や奥深さを知る。暗号への応用や，未解決問題の存在にも触れる。[日常的確率の話題] [3] 「リスク評価」に焦点を当てる。判断の際に直感のみに頼る傾向を改めるため，交通死亡事故，宝くじなど，確率を知ることができる具体例を通し，実際の確率と直感の間に大きなずれがあることを知る。同時にワクチンの有効率と副反応，がん検診などの具体例を通しデータの活用への意識づけにつなげる。また感染症の患者数の予測に用いる SIR モデルなどどんな数学が用いられるかに触れ，数学が果たす役割の一例を知る。[論理とパラドックス] 現代数学が公理，定義，定理，論理を構成要素として組み立てられ，高い客観性を保証する学問であることを学ぶ。整数や分数の演算を例として用いることで，小学校で扱う演算の代数学的背景を知る。同時に，数学パラドックス[4]を通して，完璧とも見える数学の客観性も完全とは言いきれないことも知る。

2.1　アンケート調査の実施

アンケート調査は AH, BCD クラスの授業で毎年実施した。調査の直接の目的は，次年度以降に盛り込む内容の修正，授業での学生の活動と教員側の説明のバランス，説明の速さなどが適切かといった判断，学生の数学への意識や関心の度合いを見ることなどであった。アンケート調査は第 15 週（最終回）終了後に 1 回のみ実施し，記名か無記名かは任意とし，記載内容は成績評価に影響がないことを伝えた。

アンケート調査の設問は以下のとおりであった：

問 1 あなたは算数・数学が好きですか。そうでなければ，嫌いになったのはいつからですか。嫌いになった理由やきっかけがあったらそれも書いてください。
回答の選択肢： 小学校時代/中学校時代/高校時代/嫌いではない
問 2 高校時代,（次の各単元で）基本的に理解できたと思うものに○，そうでないものに×を付けてください。
問 3 授業で扱った話題の難しさはどうだったか，次から選び，番号を記入してください。
問 4 各話題に対し興味を持てましたか。次から選び番号を記入してください。
回答の選択肢：[ア] ほとんど興味は感じない。 [イ] 多少面白そうかなという程度。 [ウ] 興味が持て，面白いと感じた。
問 5 各話題の中で，もう少し知りたいと思ったことはありましたか。

問 6 全般に関して感想等があったらお願いします。

[3] 令和３年度（2021年度）も「算数の解析的基礎」でこの内容を取り上げ,「確率・統計基礎」に対する動機づけとした。

[4] パラドックスについては，論理を考える題材であるだけでなく，興味を示す学生が多い。

2.2　アンケート調査の結果

上記の設問のうち，**問 1**, **問 4**, **問 6** についての調査結果を報告する。

問 1 算数・数学が嫌いになった時期

平成 29 年度 (2017 年度)

	AH（61 名）	BCD（11 名）
小学校時代	12	2
中学校時代	15	5
高校時代	11	1
嫌いではない	23	3

令和 2 年度 (2020 年度)

	AH（46 名）	BCD（19 名）
小学校時代	4	3
中学校時代	14	0
高校時代	12	8
嫌いではない	16	8

回答があった 77 件から，さらに，嫌いになった時期別にその理由やきっかけを，多いものから順に列挙する。( ) 内は件数である。

小学校時代　つまずいて分からなくなった。(5)/ テストで点数が取れなかった。(3)/ 計算が苦手だった。(2)/ 分数から苦手になった。(2)/ 割合から分からなくなった。(2)/ 文章題が苦手。(1)/ 図形でつまずいた。(1)/ 公式がなぜそうなるか分からなくてつまずいた。(1)/ 算数に苦手意識を持っていたから。(1)/ 算数の勉強に意味を見出せなかったから。(1)/ 面白いと思えたことがない。(1)

中学校時代　難しくなってつまずいた。(10)/ 関数でつまずいた。(4)/ どうして数学を勉強しないといけないか分からない。(3)/ 内容に興味を持てなかった。(3)/ 公式暗記のみで数学の本質が分からず，問題が解けなくなった。(2)/ テストで点数が取れなかった。(2)/ 応用が難しかった。(2)/ 先生との相性が悪かった。(2)/ 図形（の証明）が苦手だった。(1)/ 公式や計算が大変になった。(1)/ 証明や覚えなければいけないことが増えた。(1)/ 授業が面白くない。(1)

高校時代　急に難しくなってつまずいた。(14)/ 学ぶ意味が見いだせなかった。(2)/ 先生との相性が悪かった。(2)/ 授業が速すぎた。(1)/ 話を聞くだけの授業が嫌になった。(1)/ テストの点数が取れなかった。(1)/ 宿題が難しかった。(1)/ 面白さが分からない。(1)

問 4 各話題に対する興味・関心

回答 [ア]，[イ]，[ウ] をそれぞれ 1, 2, 3 に数値化し，その平均値をクラス毎に算出 した結果は下表のとおりである（さらに，分散を見るため，[ア]（ほとんど興味は感じない）と答えた人の数/有効回答数を ( ) 内に記した）：

	AH クラス	BCD クラス
トポロジーの話題	1.98 (30/102)	2.03 (5/30)
整数論の話題	2.10 (22/101)	2.33 (3/30)
日常的確率の話題	2.22 (15/100)	2.30 (4/30)
論理とパラドックス	2.13 (20/102)	2.27 (5/30)

問 6 全般に関する感想

回答のあった 77 件のうち，板書やマイクの使い方など授業の方法・技術に関するものを除き，授業内容に関わる感想を，意味が類似しているものをまとめて，多いものから列挙する。同一の学生が複数の意見を述べている場合は全てをカウントしている。( ) 内は件数である。

基本的に理解でき，毎回面白さを感じた。(9)/ 教職に就いた時にこの内容をどう生かせばよいか分からない。(6)/ 興味深い内容が多く，数学に対しての関心が高まった。(6)/ 数学は好きなので，全体的に楽しかった。(5)/ トポロジーが難しかった。(5)/ 高校数学のような，やり方と解答がセットになっているような数学ではなく，理解して知識を得ることに面白さを感じた。(4)/ 小学校算数との関わりが分かりづらい。(4)/ 難しかった。(4)/ 小学校で行う算数の授業についての内容を学びたかった。(3)/ 難しかったが理解できた部分や話の内容は興味深かった。(3)/ 数学の未解決問題がたくさんあって驚いた。(3)/ 数学が面白いと感じた。(2)/ 日常と結びついていて興味深かった。(2)/『初等算数』の講義として疑問に思う。(2)　以下は件数 1 の回答である： 数学が生活に欠かせない要素になっていることを知った。/ 将来小学校教員として，日常生活で生きる算数や，自分がこの授業で感じた算数・数学の面白さを子供たちに伝えたい。/ トポロジーで数学の概念が覆された気持ちになり面白かった。/ 自分の成長を感じ，数学が嫌いなまま教師にならなくてよかった。/ この授業で素数について学び，新素数発見のニュースを見たときに感じるものがあった。/ 内容がすべては理解できなかった。/ 日常と結び付け，意味のある学びを子供たちに与えたい。/ 数学が嫌いでないのに，一つのつまずきからやる気を失う生徒が多く，考慮していきたい。/ 算数と数学について，自分の考えを見つめ直す機会になった。/ 数学は理系教科だが，パラドックスの問題は文系の要素があると感じた。/ 数学の世界の奥深さに自分の無知を痛感した。/ 分かった時は楽しかった。/ 高校で学べなかった「何のための数学か」を学べたように思う。/ 普段使わない頭を使う感じで，難しいけど面白かった。/ この講義をきっかけに，パラドックスについて自分でも調べた。/ 知らない世界を知れた。/ 「日常生活で生きる実感が希薄」という数学のイメージが大きく変わった。

2.3　アンケート調査の結果を受けた考察

このアンケート調査は，その目的から十数年継続しており，集計した 2 年分の結果は十数年の全期間の傾向とほとんど一致している。 授業の趣旨や目標は多くの学生に理解されている実感はあるものの，小学校で実際に直接役立つ内容を期待する意見は毎年一定数見られる。ここではクロス集計を行っていないが，そのような意見と，**問 1** での「数学が嫌い」という回答との間に明らかな相関はなく，逆に，高校までに数学が嫌いになったが，この授業で数学の見方が変わったというコメントは多い。数学という教科の特性を考えた時，小学校教師を目指す学生に対するこの授業の意義は大きいと考えており，この趣旨を今後も学生に十分伝えることが重要と考える。

3　オリエンテーションの実施　～教科指導法との接続～

3.1　教科専門科目の重要性理解の難しさ

「教科に関する専門的事項（小学校）」を学ぶ『初等算数』は，小学校教員を目指す学生にとって重要な科目である。それは，主に次の 2 つの理由からである。

1. 3 年次の教育実習では算数を指導することが多く，学生自身の経験をもとに算数・数学の内容を理解することができる。
2. 算数は系統性が高い学問であるため，領域間の構成や概念的背景を理解することが重要となる。

一方で，例年，初回の授業で寄せられる学生のコメントでは，「算数・数学は公式を暗記すればよい」，「計算の仕方や解き方を覚える」といった知識・技能が重要であるとの考えが色濃い。これは，学生自身の学習経験や受験勉強といった実体験による印象が強く関係していると考えられる。また，小学校を主免とする学生の半数以上が，「算数・数学に対する苦手意識や挫折を味わった経験がある」と回答しており，指導を受けた教師から算数を学ぶ意義を見出すことが容易ではなかったことが伺える。教師の苦手意識は数学観や授業観に関わるため，学習指導要領で謳われている「算数を通して資質・能力を育むこと」の難しさが生じる。知識・技能重視の授業からプロセスを重視する授業に転換する必要があることを学生が身をもって理解する必要がある。そこで，数学の専門分野の教員による教科内容を学ぶ前の初回に「オリエンテーション」を設定し，それを『初等算数』を学ぶ意義の理解を促す機会としている。

3.2　オリエンテーションでの工夫点

(i) 具体例による課題意識の顕在化

算数は教科として存在するだけではなく，生活のあらゆる場面で算数が関係していることに学生自身に気付かせることが必要である。そこで，学校内での一場面において，子どもの「素朴な問い」に回答する場面を想定し，例えば，次のような質問に対してどのように答えるかを考えさせた。

(ア)　なぜ 0 で割ってはいけないのか？

(イ)　分数の割り算では割る数の逆数をかけるのはなぜか？

(ア)，(イ) は算数の教科内容における重要なテーマである。このような問いを通して，算数を既に出来上がったものと捉えるのではなく，成り立つ過程や根拠に着目する必要があることに気付くよう促した。多くの学生は，(ア) や (イ) を当然のルールと認識しており，なかには,「考えてはいけないから」,「そう決まっているから」とコメントする学生もいる。改めて「なぜ」を問われると回答できない状況にいる自己に気付かせ，算数の教科内容をもっと熟知させる必要があると考える。

(ii) 算数・数学の系統を顕在化させる事例の紹介

算数・数学では，日常の素朴な問題から出発しても，それを解くために問題を抽象的に考察することが多く，抽象化の結果，数学の適用範囲がさらに拡がるという歴史を繰り返してきている。こうした数学の考え方や数学の働きを学ぶことも大切である。例えば，乗法の意味の拡張については，

整数 × 整数　→　小数 × 整数（整数 × 小数）
→　小数 × 小数

というように，使う数の範囲を少しずつ広げて考えていくことができるように教科書で場面が設定されている。このような単元構成は，除法の拡張においても，さらには分数を含む演算の拡張においても行われている。当たり前のように学んだ算数・数学の内容が，体系化されてどの教科書にも組み込まれていることに気付かせることで,『初等算数科教育法』と『初等算数』のつながりの重要性を認識させることができるであろう。

3 年次後期に行われる『初等算数』は，8 月中旬から 9 月に行う教育実習Ｉを終えた後に履修するため，多くの学生は，指導方法の習得に関心が向きがちである。しかし，それらを下支えするために，算数・数学の内容理解を通した教材解釈が欠かせない。学生には 1 つでも多く教科内容を学び，自信をつけて将来教壇に立ってほしいとの願いを込めて，各分野の専門教員によるオムニバス形式で『初等算数』の授業を行うことにした。

4　分数のかけ算・わり算，割合，単位量当たりの大きさ（量）

この章では，到達目標の (1)〜(3)，および 3 章で提示した問い (ア)，(イ) に関連する授業内容について述べる。

4.1　かけ算の導入，かけ算の順序

問題 1. 1 つのふくろにえんぴつが 3 本入っています。そのようなふくろが 4 つあります。えんぴつは全部で何本ありますか。

このような具体物に関する問題を用いて，かけ算 3×4 の意味を導入することは多い（矢野 [2], p.86 など参照）。注意したいのは，このかけ算を

$$4_{\text{ふくろ}} \times 3_{\text{本/ふくろ}}$$

と表記しても一向に差支えなく，世界的に決まりはないということである。ただし,『問題 1 のようなかけ算を $3_{\text{本/ふくろ}} \times 4_{\text{ふくろ}}$ と表記せよ』と仮に一時的に順序を固定した場合,「1 ふくろにえんぴつが 4 本入っているふくろが 3 つ」の場合のえんぴつの総数は「$4_{\text{本/ふくろ}} \times 3_{\text{ふくろ}}$」と表記されることになるが，両者はともに同じ値 12 である（**かけ算の交換法則**）。このことは児童に気づいてほしい。それも踏まえた上で，**『問題 1 のかけ算は $3_{\text{本/ふくろ}} \times 4_{\text{ふくろ}}$ と表記しなければならない派』**（かけ算順序固定派）がどのようにして発生したのかと考えると,「そのほうが児童が混乱しない」,「法則を見つけ易い」という配慮なのではないだろうか。例えば，次のような問題を考える：

問題 2. 1 ふくろにえんぴつが 3 本入っています。そのようなふくろを A さんは 4 ふくろ，B さんは 5 ふくろもっています。2 人あわせて，えんぴつは何本ありますか。

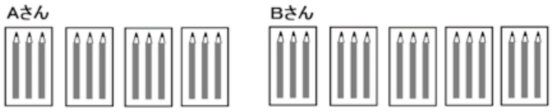

図 1: 分配法則

この場合，A さんがもっている鉛筆 $3_{\text{本}} \times 4_{\text{ふくろ}}$，B さんがもっている鉛筆 $3_{\text{本}} \times 5_{\text{ふくろ}}$，と揃えて表記したほうが，**分配法則**

$$3 \times 4 + 3 \times 5 = 3 \times (4 + 5)$$

が一目瞭然となる。逆に書いてもよいのだからと，B さんのもっている鉛筆 だけ を「$5_{\text{ふくろ}} \times 3_{\text{本}}$」と表記すると，分配法則が見えにくくなる。このような指導上の便宜や配慮からかけ算の表記順序を一時的に固定する指導方法を，教師が「固定しなければならない」，さらには,「逆に書いた場合は減点である」と認識してしまうと，かけ算の交換法則をすでに使いこなせる高学年の段階で，児童に不利益をもたらすことになる。指導上，良かれと配慮して行う授業方法（授業術）と，数学における真実・真理を区別しなければならない。このような理由からも，教科指導法と教科内容を同時に学ぶ必要がある。

4.2　わり算

かけ算の理解を前提として，わり算が導入される。

問題 3. 1 つのふくろにえんぴつが何本か入っています。そのようなふくろを 4 つ集めると，えんぴつが全部で 12 本になりました。1 つのふくろにえんぴつは何本入っているでしょうか。

という問題を用いるならば，かけ算 $\square \times 4 = 12$ において $\square$ にあてはまる数が**わり算** $12_{\text{本}} \div 4_{\text{ふくろ}}$ の定義である。そして，単位にも着目するならば，これは**等分除**と呼ばれる種類のわり算である。**等分除**は，単位量 (1 ふくろ) 当たりの量 (本数) をもとめるわり算である。次に，

問題 4. 40 cm の紙テープを 8 cm ずつに切り分けると，何本できますか。

という問題を考える。この問題においても，かけ算 $8 \times \square = 40$（あるいは，$\square \times 8 = 40$）において $\square$ にあてはまる数 5 が**わり算** $40_{\text{cm}} \div 8_{\text{cm}}$ の定義であるが，これは,「8_{cm} を何倍すれば 40_{cm} になるか」を求めるタイプのわり算であり，**包含除**と呼ばれる。わり算を（教師が）等分除，包含除に分類することに関しては，かけ算順序固定問題とも関連して批判もあるようである。しかし，**包含除**が同種のものの**割合** (proportion)（例えば，40_{cm} の紙テープの 8_{cm} の紙テープに対する割合）を表すと考えることは，算数（あるいは，理科）における考察・観察として間違っていないのではないだろうか。問題 3 で,「12 本」が「4 ふくろ」の何倍分かではあり得ない（数値としては $12 = 4 \times 3$ であるが)。

さて，次に,「**なぜ 0 で割ってはいけないのか**」について，将来，小学校で算数を指導する（予定の）大学生が納得できる説明を考えてみよう：

なぜ 0 で割ってはいけないのか

「$\square \times 0 = \triangle$」の $\square$ にあてはまる数が，わり算 $\triangle \div 0$ で表されるが，$\triangle \neq 0$ のときは，そのような $\square$ は**ない**。$\triangle = 0$ のときは，そのような $\square$ は**たくさんあって 1 つに定まらない！**だから,「わり算 $\triangle \div 0$」は考えない！

この説明は，大学で専門的な数学を学ばない（『初等算数』の大部分の受講生はそうである）学生たちにも理解された。大学以降で学ぶ「代数学」の用語を用いるならば，体 (field) K において $x \cdot 0 = 0\ (\neq 1)$ であるから，$x \cdot 0 = 1$ となる x が存在しないこと，すなわち，0 の乗法逆元が存在しないことを言っている。旭川校数学教育専攻では，専門科目の「代数学 III, IV, V」で，群 (group)，環 (ring)，体についての理解を深めている。

4.3　分数を含むかけ算

数の整数倍から分数倍（小数倍）へ拡張していく過程は重要である。

問題 5. 次の問いに答えなさい。

問 1　1 個 $300g$ のねんどのかたまりが 4 個あります。全部で何 g ですか。

問 2　1 個 $300g$ のねんどのかたまりが $\frac{2}{3}$ 個あります。それは何 g ですか。

問 1 は，整数倍 300×4 で表され，答え　$1200g$ であるが，**問 2** になると，分数倍 $300 \times \frac{2}{3}$ で表される。しかし，$300 \times \frac{2}{3} = 300 \times \frac{1}{3} \times 2 = (300 \div 3) \times 2 = 200$ と既習の式で表すことができて，答え　$200g$ である。

問題 6. C さんは毎日 $\frac{1}{4}$ 個みかんを食べています。5 日でみかん何個分食べますか。

これは分数を整数倍する問題であり，答えはかけ算 $\frac{1}{4}\times 5$ で表されるが，児童が分数の意味を理解していれば，$\frac{1}{4}\times 5=\frac{5}{4}$ であるから，答え $\frac{5}{4}$ 個である。

4.4　分数でわる

○, □, △ を整数（$\geqq 1$）とするとき，

$$○ \div \frac{△}{□} = ○ \times \frac{□}{△}$$

である。児童は，このことを「きまり」として暗記するのではなく，こうなる理由を納得してほしい。具体物に関する問題を使って理由を考えてみると，等分除と包含除で違った説明を要することがわかる。教科書には，等分除タイプの分数のわり算に対する説明（壁にペンキを塗る問題など）を載せていることが多い。矢野 [2], p.241 なども参照。できるだけシンプルな問題を用いて理由を理解させたい。

問題 7. 冷蔵庫にあったバターのかたまり $\frac{3}{4}$ 個の重さをはかると，150g でした。バターのかたまり 1 個は何 g ですか。

[考え方の例] $□\times\frac{3}{4}=150$ なので，□ を求めるには，わりざん $150_g\div\frac{3}{4}_{個}$（**等分除**）を行えばよい。$\frac{3}{4}$ 個が 150g なので，$\frac{1}{4}$ 個は $150\div 3=150\times\frac{1}{3}\,g$ であり，1 個は $150\times\frac{1}{3}\times 4\,g$ ということになる。したがって，$150\div\frac{3}{4}=150\times\frac{1}{3}\times 4=50\times 4=200$，答え 200$g$ となる。まとめると，

> 分数でわる（等分除の場合）
>
> $$150\div\frac{3}{4}=150\times\frac{1}{3}\times 4=150\times\frac{4}{3}$$

問題 8. D さんは毎日 $\frac{3}{4}$ 個みかんを食べています。みかん 6 個分食べるには何日かかりますか。

[考え方の例] $\frac{3}{4}\times□=6$ なので，□ を求めるには，わりざん $6_{個}\div\frac{3}{4}_{個}$（**包含除**）を行えばよい。ここで，次のわり算の性質[5] を使ってみよう。

$$\begin{aligned} □\div△ &= (□\times◇)\div(△\times◇) \\ □\div△ &= (□\div♡)\div(△\div♡) \end{aligned}$$

すると，$6\div\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{4}\times 4\times 6\right)\div\left(\frac{1}{4}\times 3\right)=(4\times 6)\div 3=8$ となり，答え 8 日 となる。まとめると，

> 分数でわる（包含除の場合）
>
> $$6\div\frac{3}{4}=(4\times 6)\div 3=6\times\frac{4}{3}$$

令和 3 年度の『初等算数』の受講生たちには，「なぜ分数でわるときには，その分数を逆数にしてかけるのか」を児童に理解させるための具体物を用いた問題とその説明を考えてもらった。等分除と包含除の場合の説明の違いを体験できたようである。しかし，中には，具体物から離れ，方程式を解くように，次のように考えた学生もいた：

「$○\div\frac{△}{□}$ は，$◇\times\frac{△}{□}=○$ の ◇ に当てはまる数だが，両辺に $\frac{□}{△}$ をかけると，$◇\times\frac{△}{□}\times\frac{□}{△}=○\times\frac{□}{△}$ となり，$◇=○\times\frac{□}{△}$ である。」

この説明を用いるとすれば，児童が分数のかけ算 $\dfrac{n}{m}\times\dfrac{m}{n}=1$ に習熟していなければならない。

4.5　割合，単位量当たりの大きさ（量）

> 「もとにする量 B」 $\times\ P\ =$「くらべる量 A」

において，P を B に対する A の**割合** (proportion) と呼ぶ[6]。つまり，割合とは，「くらべる量 A」÷「もとにする量 B」であり，同種の 2 つの量の比 (ratio) である。

例題 9. 300g のバターのかたまりの $\frac{2}{3}$ を使いました。すると，使ったバターの重さは $300_g\times\frac{2}{3}=200_g$ であり，もとのバターの重さに対する使ったバターの重さの割合は $\frac{2}{3}$ です。

例題 10. ある食塩水 1600g に食塩が 8g 含まれています。このとき，$1600\times□=8$ とすると，□ は $□=8_g\div 1600_g=0.005$（**包含除**）でもとめられ，食塩水全体の重さに対する食塩の重さの割合は 0.005（= 0.5 %）です。

このようにして，

> **割合**を求めるわり算は，同種の 2 つの量の比なので，**包含除**である。

[5] 除法のこれらの性質は学習指導要領でも常に重視されている。小学校学習指導要領解説算数編［3］，p.188参照。

[6] 小学校学習指導要領解説算数編［3］，p.239に合わせて，記号 A, B, P を用いた。日本数学教育学会編著『算数教育指導用語辞典』［5］も参照。

続いて，**単位量当たりの大きさ（量）**について考える。

問題 11. ある車が時速 60 km（1 時間あたり 60 km）で 3 時間走りました。その車は何 km（道のり）走りましたか。

$60 \times 3 = 180$ であるから，答え 180 km である。

図 2: 時速 60 km で 3 時間

問題 12. ある車が時速 60 km で 1.5 時間走りました。その車は何 km を走りましたか。

これも，小数倍になるというだけで，$60 \times 1.5 = 90$ であるから，答え 90 km である。

図 3: 時速 60 km で 1.5 時間

まとめると，**速さ**（= 単位時間当たり進んだ道のり）については,「速さ × 時間 = 道のり」が成り立ち，単位時間当たり進んだ道のりを何倍かすることによって進んだ道のりが得られる。このシンプルな基本を理解させないまま,（しばしば授業で使われている）「みはじ」,「きはじ」といった図を用いることは，公式暗記に頼って答えを出すことと同じではないだろうか。

問題 13. ある車が 150 km の道のりを 3 時間で走りました。その車の時速は何 km ですか。

というような速度を求める問題になると，$\triangle_{\mathrm{km}} \times 3_{\text{時間}} = 150_{\mathrm{km}}$ から，$\triangle_{\mathrm{km}} = 150_{\mathrm{km}} \div 3_{\text{時間}} = 50_{\mathrm{km}}$ となり，答え 時速 50 km である。まとめると，

> **単位量当たりの大きさ（量）**を求めるわり算は，**等分除**である。

割合，単位量当たりの大きさ（量）の考え方は，次のように中学校・高等学校の数学へと引き継がれていく。

問題 14. 関数 $y = f(x)$ は $x = 1$ のとき $y = 2$, $x = 4$ のとき $y = 32$ という値をとる。この関数は，x が 1 増えるごとに y がいくら増えるか。

x が $4 - 1 = 3$ 増えるとき y が $32 - 2 = 30$ 増えるので，$(32 - 2) \div (4 - 1) = 10$ となり，答え 10 である。ここで,「x が 1 増えるごとに y がいくら増えるか」

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

は,「単位量（x の増加量 1）当たりの y の増加量」であり，異種の 2 つの量（x の増加量と y の増加量）の比 (ratio) [7]（率 (rate)，商 (quotient) とも）であるが，中学校ではこれを**関数の変化の“割合”**と呼んでおり，高校では，関数の**（平均）変化“率”**と呼んでいる。2 次関数などの場合は，x の値によって,「x の増加量 1 あたりの y の増加量」が変化し，これは中学校数学における重要なテーマのひとつであり，高校での微分法の学習へと繋がっていく。関数の変化の割合に関連し，**傾き**について考えてみる：

問題 15. 坂 A では水平に 3m 移動したときに 1m 上昇し，坂 B では水平に 5m 移動したときに 2m 上昇する。どちらの坂が急か。

水平移動 1m あたり 何 m 上昇するか（坂の傾き）を比べると，坂 A では $1 \div 3$ で $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$m，坂 B では $2 \div 5$ で $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$m なので，坂 B のほうが「急」であると言えよう。そう考えると，**傾き**は，単位量当たりの量であるが，単に，水平移動（長さ）に対する垂直移動（長さ）の比 （割合，商）でもある。

5　算数の代数的基礎

5.1　授業の目的と題材

数学的思考は，法則の発見とそれが何故成り立つのかの考察を繰り返すことで育まれる。算数の授業では，四則演算の規則などについて学ぶが，それは「**発見**」と「**考察**」を通して学ぶべきである。たとえば，分数の和に関しては，児童自らが通分を「発見」し，何故それで一般的に正しく計算ができるのかを「考察」して学んでいくことが望ましいと考える。すべてを人から教わるのではなく，自ら考え，正誤の判断ができるようになることに，算数を学ぶことの意義・楽しさ・面白さがある。

「発見」と「考察」を土台とする授業がどのようなものであるかは，実際に体験すると分かりやすい。そこで算数の代数的基礎の授業における題材として，自然数の性質を取り扱う「**完全数とメ**

[7] 小学校学習指導要領解説算数編［3］では,「異種の二つの量の“割合”」と呼んでいる。

ルセンヌ素数」と，素朴な数え上げを原理とする「格子多角形の面積に関するピックの公式」を取り扱った。これらの題材の選定理由は以下の通りである。

(1) 授業を通して「発見」することが必要とされるため，題材は学生にとって可能な限り未知である必要がある。そのため，標準的な授業では取り扱ってこなかった題材でなければならない。
(2) 「考察」は初等的な方法で行う事ができなければならない。簡単な四則演算を用いて理解できる内容が望ましい。
(3) 実験データから一般的な法則が類推できる題材でなければならない。

「完全数とメルセンヌ素数」に関しては，自然数の約数を列挙することができれば理解することができる。「ピックの公式」は，格子点を数え上げ，簡単な四則演算を行うだけで理解できるものなので，特別な知識は必要とされない。

これらの題材の知識自体を算数の授業で直接役立てるというわけではなく,「発見」と「考察」を土台とした数学的活動を経験し，学ぶことの面白さを知り，それを算数の授業づくりに活用できるようになることが目的である。

各授業の終わりに，学んだこと，疑問点，感想などの提出を課した。また，すべての疑問点に関してインターネットを介して回答を行った。

5.2 「完全数とメルセンヌ素数」の授業

自然数 n が**完全数**であるとは，n の約数のうち n 以外のものの総和が n に一致するときにいう。たとえば，6 の約数は $1, 2, 3, 6$ であり，そのうち 6 以外の約数の総和を取ると $1 + 2 + 3 = 6$ となるので，6 が完全数であることが分かる。完全数の歴史は古く，古代ギリシアにおいてピタゴラス（紀元前 500 年）らによって研究されたのが最初とされている。

授業ではまず 6 の次の完全数を見つけるという活動を行い，完全数への理解を深めた。6 の次の完全数は 28 であり，その後は $496, 8128, 33550336$ と続く。496 以降の完全数を授業内に自力で見つけるのは難しいので，完全数を見つけるという活動は 28 までに留め，496 以降は実際に完全数であることを確認した。

完全数であることを確認するためには約数の総和を計算する必要がある。これは素因数分解を行うと効率よく計算することができる。完全数を実際に素因数分解してみると，以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
6 &= 2 \cdot 3 = 2^1(2^2 - 1)\\
28 &= 2^2 \cdot 7 = 2^2(2^3 - 1)\\
496 &= 2^4 \cdot 31 = 2^4(2^5 - 1)\\
8128 &= 2^6 \cdot 127 = 2^6(2^7 - 1)
\end{aligned}
$$

どれも，素数 p を用いて $2^{p-1}(2^p - 1)$ という形で表せるという思いもよらない規則性があることが分かる。授業ではこの規則性を見出すという活動を行った。適宜ヒントを与えると，多くの学生が規則性に気づくことができた。

$M_n = 2^n - 1$ をメルセンヌ数という。完全数の素因数分解には素数であるメルセンヌ数が現れている。このような数を**メルセンヌ素数**という。M_2, M_3, M_5, M_7 はメルセンヌ素数である。「どのような n に対して M_n はメルセンヌ素数となるか」を問うと，多くの学生は「p が素数のとき M_p は素数となる」と予想した。進んだ学生は 7 の次の素数である 11 に対しては「M_{11} は素数ではない」ということに気づいた。さらにその次の素数である「M_{13} は素数である」ということにも気づいた。これは素数に関する法則は一筋縄ではいかないことを示していて，裏切りにも感じられるかもしれない。しかし，予想した命題の逆である「M_n が素数ならば n は素数である」は正しい。これは簡単に証明できるので，授業ではこの証明を取り扱った。その後は，偶数の完全数とメルセンヌ素数の対応について説明を行った。また以下の点についても簡単に説明を行った。

(1) 完全数が無数に存在するかは未解決であり，完全数のような小学生でも理解できる簡単な概念が，最先端の数学を用いても解決することができない問題につながっているということ。

(2) メルセンヌ素数を探索する世界的なプロジェクト（GIMPS）があり，誰でも参加できること。

(3) メルセンヌ素数が疑似乱数の生成 [6] に利用され，社会における応用があること。

5.3 格子多角形の面積に関するピックの公式の授業

座標平面において，座標の値が整数であるような点を**格子点**という。頂点の座標が整数であるよ

うな多角形を**格子多角形**という。**ピックの公式**とは，格子多角形の面積が，内部の格子点（**内点**）の個数と辺上にある格子点（**境界点**）の個数で決定されることを述べた公式である。

授業では，方眼紙に実際にいくつか格子多角形を書き，内点と境界点の個数と面積の関係について調べるという活動を行った。最初は，思い思いに複雑な多角形を書いてしまった学生が多く，点の個数の数え間違いが多発してしまったが，正しいデータを黒板にまとめ，規則性について推測を行った。適宜ヒントを与えると，多くの学生がピックの公式を推測することができた。

任意の多角形は三角形に分割することができるため，多角形の面積の計算は三角形の面積の計算に帰着することができる。このことは小学校で学ぶ事実であるが，ピックの公式の証明も格子三角形に帰着することができる。授業の終盤では，格子多角形をどのように分割すればよいかを考えながら，ピックの定理の証明を行った。

5.4　学生の反応と今後の課題

算数の代数的基礎の授業において学んだことについて，完全記述式でまとめてもらったところ，以下のような反応が見られた。

- 自らの手で法則性を考えることの大切さを感じた。
- 規則性や法則を見つけて考える活動はとても楽しい。
- データを照らし合わせて法則を見つける活動は教師になっても行ってみたい。
- 算数の授業において，法則などを自分でみつけ，それがどうして成り立つのかを考える活動に楽しさを感じさせることが重要であると思う。
- 「どんな法則があるのだろう」とワクワクしながら学ぶことができた。公式を単に紹介されるより「自分で導き出す」という達成感を味わうことができた。
- 算数はアクティブラーニングが難しいと言われているが，算数こそこのような活動的な学習が合っていると感じた。算数の苦手意識をなくす授業の在り方を学ぶことができた。
- 算数の範囲外であったが「算数おもしろい」と思わせられる授業づくりの見本となった。

以上のような反応がみられた学生に対しては，授業の目的が十分に達成できたと考えられる。一方で,「この講義の内容が算数の授業でどのように活かせるのか分からない」「算数の授業で役立つような内容を学びたい」などの否定的な意見もあった。また「そもそも基礎学力に不安があり授業についていけなかった」という意見も見られた。これらの意見に対して，どのようにアプローチしていくのかが今後の課題である。

6　データの活用および確率・統計

6.1　確率・統計を学ぶ目的・重要性

近年急速に進む情報社会において，膨大なデータの分析や活用ができる能力が求められており，算数・数学においても単元「**データの活用**」として，その基礎学習が重要視されている。令和２年４月から実施された小学校学習指導要領（[3] 参照）および令和３年４月から実施された中学校学習指導要領（[4] 参照）においても，これらの重要性が解説されている。『初等算数』（確率・統計基礎）の第１回授業では,「データの活用」の中で度々現れる「確率・統計」の考えが，我々の生活の中で非常に身近なものであることを実感させるねらいとして，これらを学ぶ目的・重要性について解説した。我々の生活の中には偶然に起こる得る事柄が沢山潜んでいる。例えば，コイン投げの結果や宝くじの結果などが挙げられるだろう。自然界で偶然に起こり得る事柄に注目すると，天気の変動や地震の頻度などが挙げられる。このように我々の身の回りには偶然の現象に溢れており，これらと向き合いながら生活している。確率・統計の学習は，こういった偶然に起こり得る事柄の中にある法則性を見出すことで，**偶然に起こり得る事柄を選択するときの意思決定**や，**過去のデータから未来に起こり得る事柄 (例えば地震や洪水といった自然災害) を予測する**ための基礎的知識を身につける点で重要である。授業終了後に「確率・統計を学ぶ重要性」に関する感想 (授業の感想，理解できたこと，新たな発見があったことや，学習しておきたいことなど) を提出させた結果，以下のような回答が得られた (一部抜粋)。

- 高校までの確率の授業の問題では，さいころやくじ引き，じゃんけんが多く取り上げられていたので，今まで身近で偶然起こる出来事について考えたことが無かったです。偶然起こっていることはもっと存在しているのかと思うと，とても気になりました。
- 確率などを学ぶ目的として，災害などの出来事に備えたり，不利益になりえる事を回避したりするためであるという話を聞き，中学校や高校ではあまり学ぶ意義を考えることなく確率を学んできたのですが，自分の生活に直結するものであること，またデータについて学ぶことは自分の身を守るための判断材料になることを理解することができました。
- 自分が小学生のときに割合や簡単な確率の勉強をしていて，今はそのようなことは思わないが当時は生活に役に立たないと思っていた。日常生活で

> 使える場面と言っても，消費税の計算で割合の知識を使う程度で，それ以外に活用できる場面などほとんど無いと思っていたからである。しかし，今回の授業を受けて，改めて確率や割合について考えてみると，天気の変化や株価の変動など，日常生活と密接に関わり合っていることが分かった。

上記の回答から，確率・統計は役に立たないものという認識や，これらを学ぶ目的がわからないまま学習してきた受講者が多いということがわかる。生活の中に必要となる考えであることを実感して確率・統計を学習する動機づけができたと考えられる。

6.2　確率の定義

そもそも確率とは何なのか。他の数学単元と異なり，確率はかなり曖昧な言葉で定義されていると感じる学生が多い。これには次の 2 つの原因があると考えられる。

(1) 数や図形などを扱う単元と異なり，確率は先験的な解釈に頼った定義が多いこと。

(2) ランダムな試行という言葉の曖昧さ・それらの解釈によって確率の意味が変わってしまうこと。

授業ではこの素朴な疑問について解説してきた。まずは，中学校・高等学校数学で扱ってきた確率の定義を思い出す。普通のさいころ投げやコイン投げといった試行では, 出現し得るどの結果も同程度の割合であることが期待される。このような試行は**同様に確からしい**と呼ぶ。同様に確からしい試行の場合，試行によって得られる全事象の場合の数を N としたとき，その中からある一つの結果が起こる割合は一様に $1/N$ と言える。このことから，中学校・高等学校数学で扱う事象の確率は以下のように定義されていたことを思い出す。(改訂版 高等学校 数学 A, 数研出版, p.43 [7] より引用)

定義 6.1. 同様に確からしい試行において，起こり得る全ての場合の数を N, 事象 A が起こり得る場合の数を a とするとき，確率 $P(A)$ とは

$$P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ が起こる場合の数}}{\text{起こり得る全ての場合の数}} = \frac{a}{N}$$

で定義される。

この確率は**ピエール＝シモン・ラプラス** (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827) による**先験的確率**と呼ばれるものである。この定義によると，同様に確からしい試行においては，確率というのは事象が起こり得る場合の数で決まる量であるということである。ラプラスはこの先験的確率をもとにして，これまでの確率論を統合する研究を行い, **古典的確率論**として著書にまとめ，確率論の基礎を構成したとされている。([8]) しかし，この定義には不十分な点がいくつかある。

(1) 確率の定義の中に「同様に確からしい」という用語が入っているが，これは「どの結果も同程度の割合で現れる」すなわち「どの結果も同じ確率で現れる」ということである。つまり，確率を定義する前に先験的な確率を仮定に使ってしまっており，循環論法に陥っている点である。[8]

(2) 偶然に起こる出来事とは，同様に確からしい試行のみで得られるものばかりではない。例えばさいころ投げにおいて，与えられたさいころは 1 に少し偏っているかもしれない。このさいころを振ると，6 が少し出やすいことが感覚的にもわかる。より現実の設定で偶然の出来事を考えたい場合は，同様に確からしいとは限らない試行も無視できない。結果に偏りがある場合，１つ１つの結果が起こる割合の一様性が崩れるため，上で定義した確率では不十分である。

問題点 (1) に関して「同様に確からしい」という用語が確率の意味を含んでいるため，まずこれに関して解決策を提示しなければならないだろう。つまりどういう根拠で「起こり得る結果が同程度の割合で起こることが期待される」のかを考えることになる。我々は (偏りのない) コインが出る目の確率は 1/2 であるということを知っているが，例えば 2 回投げたとき表裏が必ず 1 回ずつ出るということを保証しているわけではない。では同程度の割合とは結局何なのであろうか。実はこの根拠の一つとなる考えが, ラプラスよりも少し前の時代に**ヤコブ・ベルヌーイ** (Jakob Bernoulli, 1654-1705) が証明した**大数の (弱) 法則**の考えである。これは試行回数が増えるにつれて試行の不確実さ

---

[8] 実はこの問題に関しては，ラプラスが先験的確率を定義する前に，ヤコブ・ベルヌーイの大数の法則によって「同様に確からしい」の解釈が与えられているため，歴史的には不十分な定義ではないことに注意する。ここでの注意は，初めて先験的確率を学習する生徒に対するものである。

が減り，結果の出現頻度を推定できることを示したものである。例えば 1000 回, 10000 回... とコイン投げを繰り返すと，その内の半分近くが表が出そうであるということである。この結果をもとに「同様に確からしい」という言葉を用いず確率を定式化したのが次の統計的確率である。

定義 6.2. 同じ条件のもとで試行を n 回繰り返したとき，事象 A が a 回起こったとき，$p_A(n) := a/n$ をこの試行に対する事象 A の**相対頻度**という。試行回数 n を十分大きくしたとき，相対頻度 $p_A(n)$ がある一定の値 $p_A \in [0,1]$ に収束するとき，p_A をこの試行のもとでの事象 A が起こる**統計的確率**とよぶ。

すなわち,「同様に確からしい」の用語に含まれている「同程度の割合と期待される」根拠は，十分多くの試行を繰り返したときの，各結果の相対頻度の収束値が同程度であるということで定めると妥当であろうということである。このことを踏まえ，もう少し厳密に「同様に確からしい」を定義すると以下の通りとなる。

定義 6.3. 標本空間を $\{a_1, \cdots, a_N\}$ とする．各 $i = 1, \cdots, n$ に対して, この試行のもとでの事象 $\{a_i\}$ が起こる統計的確率を p_i とするとき, $p_i = \frac{1}{N}$ $(i = 1, \cdots, n)$ となるならば，この試行は同様に確からしいという。

我々は通常与えられたコインやさいころを振るとき，これらが出る結果は上記の意味で同程度の割合で出現する (同様に確からしい) と仮定してきたのである。この意味で同様に確からしい試行を定義すると，事象が起こる確率はラプラスによる定義の中で循環は起こらない。

では，問題点 (2) の同様に確からしくない試行に対して確率はどう定められるのだろうか。実はこれに対する一つの答えはない。例えば，板の上に針を落としある地点に針が落ちる確率を求める際にも，針の落とし方によるだろう。真ん中に落としやすい傾向があれば真ん中に落ちる確率が高くなるだろうし，無作為に落とせば，特定の地点の確率が高いというわけでもなくなる。このように，何をもってしてランダムな試行[9]というのかは解釈によって変わるため,「確率といえばこれ」といった明確な答えはないのである。[10]そこで確率とはどう定められるかという数量的な問題は保留し，確率というものが満たすであろう性質を**公理** (axiom) として設定し，この公理から定まるものを確率とみなす方法が考え出された。この先駆者が**アンドレイ・ニコラエヴィッチ・コルモゴロフ**（Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903-1987) であり，この考えの下での確率論こそが現代確率論 (公理論的確率論) の基となっている。 ([10] を参照)。コルモゴロフの**公理主義的確率**は以下のように定められる。

定義 6.4. Ω を標本空間とする。このとき事象 A に，次の公理を満たすような実数 $P(A)$ を対応させる関数 P を**確率測度** (probability measure) といい, 実数値 $P(A)$ を事象 A が起こる確率という。

(1) 任意の事象 A に対して，$0 \leq P(A) \leq 1$. とくに $P(\Omega) = 1$.

(2) 事象 $A_1, A_2, \cdots \subset \Omega$ が互いに排反であるとき

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \qquad \text{(完全加法性)}$$

完全加法性からつぎの**有限加法性**を導くことができる：事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset \Omega$ が互いに排反であるとき

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k). \qquad \text{(有限加法性)}$$

標本空間が有限集合である場合は，完全加法性の代わりに有限加法性を公理として入れておくことができる。この性質はこれまでのラプラスの確率においても成り立つ性質であった。

例 6.5. $\Omega = \{a_1, \cdots, a_N\}$ を標本空間とする。例えば事象 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ が起こる確率 $P(A)$ は，ラプラスの定義によると $P(A) = k/n$. 一方で事象 $\{a_1\}, \{a_2\}, \cdots, \{a_n\}$ は互いに排反であり

$$P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \cdots + P(\{a_k\}) = \frac{k}{n}.$$

このようにラプラスの確率においても，有限加法性が成り立っていることがわかる。

同様に確からしくない場合の試行においても決まった確率の定義はないが，上記の公理主義的確率の意味で解釈することはできる。

[9] ランダムな試行とは，確率変数やそれらが従う分布という概念で説明することになるが，このことについては本節では述べないこととする。

[10] 有名な例としては**ベルトランのパラドックス**［9］が挙げられる

例 6.6. 標本空間を $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ とする。定義 6.4 の (1), (2) を満たす P において

$$P(\{1\}) = \frac{1}{12},\ P(\{2\}) = \frac{1}{6},\ P(\{3\}) = \frac{1}{6},$$
$$P(\{4\}) = \frac{1}{6},\ P(\{5\}) = \frac{1}{6},\ P(\{6\}) = \frac{1}{4}$$

と対応づけると，これは目 1,6 に偏りのあるさいころ投げを表すモデルとなる。言い換えれば，このさいころを投げたときの目は上記の確率法則 P に従って出現することを意味している。

6.3 確率の計算：長さ・面積・体積との関係

公理主義的確率の定義 (定義 6.4) をみると，確率の定義を与えているというよりは，P という記号を確率の意味をもつ尺度として与えているというのが正確である。この尺度というのは数学的には**測度** (measure) と呼ばれるものに相当する。実は算数科で扱った区間 (線分) の長さ, 長方形の面積, 直方体の体積といった量も，測度 (より正確には Lebesgue 測度) と呼ばれるものの具体例である。

(1) $\mathbb{R}$ 上の区間 $I = (a,b]$ の長さは $m(I) := b - a$.

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の長方形 $I = (a,b] \times (c,d]$ の面積 $m(I)$ は $m(I) := (b-a)(d-c)$.

(3) $\mathbb{R}^3$ 上の直方体 $I = (a,b] \times (c,d] \times (e,f]$ の体積 $m(I)$ は $m(I) := (b-a)(d-c)(f-e)$.

確率と区間の長さ, 長方形の面積, 直方体の体積などは, 測度であるという点で考えれば，数学的には同じ対象を扱っていたことになる。

例 6.7. 区間 $[0,1]$ の上に針を落としたとき，刺さった箇所 ($[0,1]$ 上の実数) を X とする。このとき，X が $1/3$ 以上 $1/2$ 以下の上に落ちる確率 $P(1/3 \le X \le 1/2)$ を計算したい。なお針の落とし方は無作為とする。[11] したがって針が区間 $[1/3, 1/2]$ に落ちる確率というのは，区間 $[0,1]$ の長さ 1 に対する区間 $[1/3, 1/2]$ の長さの比率だけで決まる。つまり，

$$\begin{aligned} P(1/3 \le X \le 1/2) &= \frac{[1/3, 1/2] \text{ の長さ}}{[0,1] \text{ の長さ}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

と計算される。[12] この例は，確率を区間の長さ (またはその比率) として解釈できる例である。[13]

[11] つまり，特定の位置に落ちやすいということはないとする。数学的には「確率変数Xは［０，１］上の一様分布に従う」という言い方となる。

6.4 学生の反応と今後の課題

令和 3 年度の授業では「確率」という言葉の曖昧さやその原因を理解し，先験的確率・統計的確率・公理主義的確率という 3 つの確率の解釈を学習した。これまでの授業での受講生の反応は以下の通りであった (一部抜粋)。

- 確率は，その概念自体がすごく難しい，数学のわりになんだかふわふわした分野であるという 印象があったので，今日の講義を聞いて〈確率・統計を学ぶ目的〉から一つ一つの意味までとても丁寧に説明して下さったので，少しずつ確率について掴むことが出来ました。
- 「同様に確からしい」という言葉とその確率についての定義がお互いに依存し合っているような循環した関係があることを今日の講義で確認することができ，当時分かりにくいと感じた原因を少し理解することができました。
- 面積による表現というのが今まであまり見たことがなく，新鮮な表現だと感じた。中学校二年生で確率を学ぶ際に生徒が理解するのにわかりやすいと思った。

上記の反応にもあるように，大数の法則の基礎的考えが「同様に確からしい」試行の意味を与えることを説明し，この言葉に対する受講生が感じていた曖昧さを解消できたと考えている。また算数で扱う長さ・面積・体積と確率との関係にも触れ，これまでの先験的確率や統計的確率による解釈とは違うものであり，突き詰めると「ランダムな試行」の解釈が重要であるということを実感させることができたと考えている。一方で令和 3 年度の授業では，1 回目の授業で学習する動機づけをおこなったにも関わらず，実際の現象例を多く取り扱えなかったことや，実際の小学校の現場に沿った関連づけが弱かったことが反省点として挙げられる。今後の課題として，確率の意味を深く理解するだけにとどまらず，これが小学校の現場教育でどのように活かされるかまでを詳しく説明することを挙げる。

7 終わりに

教員養成大学において，数学の教科内容の習得にかけられる時間は限られている。それゆえ，担当教員は，専門性を活かし，授業内容を厳選し，

[12] 実はこの確率法則こそが,「Xが［０，１］上一様分布に従う」という言葉の意味である。

[13] 授業で扱いきれなかったが，確率を面積として解釈する問題もあり，有名な例としてビュフォンの針と呼ばれるものがある。

効率よく学べる体系的カリキュラムと授業計画を組まなければならない。教員養成の観点からは，教育職員免許法施行規則第 5 条表備考第 1 号にも規定されているように，一般的・包括的で汎用性のある普遍的・基礎的な内容であることが望まれる。一方，数学は，どのような学問であるか，どのように社会に活用されているかがあまり知られていない。したがって，高校までは知らなかった広い数学の世界に触れ，数学の奥深さや有用性を知ることも大切である。また，既知の真理を受け身で教わるだけではなく，自力で真偽判断が可能になることの中にも，算数・数学を学ぶ意義・楽しさがある。

令和 3 年度の『初等算数』の授業内容の選定に当たっては，北海道教育大学釧路校教員による教科書 [11]，論文 [12] も参考にさせていただいた。感謝の意を表したい。

『初等算数』の授業改善については，この論文に書き切れなかったことがまだ多くある。例えば，3 クラスのうち，数学教育専攻の学生が含まれる EFG クラスに対しては，大学の数学専門科目で得た体系的知識（[13] など参照）に繋がるような配慮も行った。それらについては，続く論文で報告したい。

参考文献

[1] 北海道教育大学教育学部旭川校 (2019). 『平成 31 年度学生便覧』, 219 頁.

[2] 矢野健太郎 (1991). 『お母さまのさんすう』，暮しの手帖社，第 7 刷, 345 頁.

[3] 文部科学省 (2017 年 7 月). 『小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　算数編』, 400 頁.

[4] 文部科学省 (2017 年 7 月). 『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　数学編』, 225 頁.

[5] 日本数学教育学会 (2009). 『算数教育指導用語辞典』 第四版，教育出版, 326 頁.

[6] 松本眞，西村拓士 (1998). *Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator*, ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation 8 no. 1, 3–30.

[7] 改訂版 高等学校 数学 A, 数研出版, 2019 (平成 31) 年 1 月, 184 頁.

[8] ピエール=シモン ラプラス 著，内井惣七 訳 (1997). 『確率の哲学的試論』，岩波書店, 287 頁.

[9] P. E. Tissler (1984). *Bertrand's Paradox*, The Mathematical Gazette (The Mathematical Association) 68 (443), 15–19.

[10] アンドレイ N. コルモゴロフ 著，坂本實 訳 (2010). 『確率論の基礎概念』，筑摩書房（ちくま学芸文庫）, 293 頁.

[11] 北海道教育大学釧路校・数学教育実践分野 (2020). 令和 2 年度（2020 年度）・後期 『初等算数テキスト』 （初版 2017 年 9 月，第 2 版 2018 年 4 月）, 37 頁.

[12] 杉山佳彦，早勢裕明，黒川友紀，関谷祐里，和地輝仁，大滝孝治 (2020). 教科専門と教科教育の協働による初等算数テキスト作りについて，北海道教育大学紀要（教育科学編）第 70 巻第 2 号，133–146.

[13] 齋藤幸子 (2022). 教員養成大学における数学専門科目を活用した幾何学学習，北海道教育大学紀要（教育科学編）第 72 巻第 2 号，129–142.

（齋藤　幸子　旭川校准教授）
（小室　直人　旭川校教授）
（谷地元直樹　旭川校教授）
（辻栄　周平　旭川校准教授）
（植田　優基　旭川校講師）