児童による単位変換の乗法の使用に関する実態調査

北海道教育大学紀要（教育科学編）第68巻　第２号　　平 成 30 年 ２ 月
Journal of Hokkaido University of Education（Education）Vol. 68. No.2　　February, 2018

児童による単位変換の乗法の使用に関する実態調査

渡　会　陽　平

北海道教育大学札幌校数学教育学研究室

Survey on Use of Multiplication of Unit Conversion by Elementary School Students

WATARAI Yohei

Department of Mathematics Education, Sapporo Campus, Hokkaido University of Education

概　要

本稿の目的は，小学校の児童が単位変換の問題場面において外比を適用する乗法を用いるのか，その実態を明らかにすることである。そのために，大学生を対象とした単位変換の問題場面における解決方法についての調査を行ったうえで，小学校第６学年の児童を対象とした単位変換の問題場面における解決方法及び包含除の操作の数直線図における表現の仕方についての調査を行った。

その結果，①大学生の半数近くが外比を適用する乗法を用いて単位変換を行ったのに対して，小学校第６学年の児童の多くは加法的に単位変換を行い，外比を適用する乗法を用いて単位変換を行う児童はごく少数に限られているという実態と，②包含除の操作を数直線図に表現する際には，第６学年の児童の半数近くが未習であるにもかかわらず外比を意味する対応関係の矢印で表現することができるという実態が明らかになった。

１．研究意図

数量の関係を式で表すことは「関数の考え」による問題解決の重要な要素の１つであり，小学校算数科第６学年には比例する２量の関係を式で表す学習内容が位置づけられている。比例の式は数学的には比例関係にある２つの集合間の対応の関係を表したものであるが，児童は内比（同種の２量の割合）を用いた変化の関係で比例の式を意味づけていく傾向があり，比例の式を効果的に使えるようになるためには内比を超えた比の認識が必要であることが指摘されている（日野，1997）。この現状に対して，渡会（2016）は小学校算数科では内比を用いる乗法・等分除と内比を求める包含除が量に対する操作として意味づけられて指導されているために児童は内比に着目する傾向があるという仮説を立て，比例の式の指導に先立って外比（異種の２量の割合）に着目することのできる単位変換の乗法・除法を指導することによって，比例の式を外比を用いた対応の関係で意味づ

ける指導を提案している。

渡会(2015)の提案する指導はVergnaud（1988）の概念野理論に基づくものであり，子どもが問題解決において暗黙的に用いている数学的な性質を顕在化することによりなされる。この視点は，例えば杉山（1986）が小数をかける乗法の問題場面において「一方が２倍，３倍，…になればもう一方も２倍，３倍，…になる。」という比例関係を顕在化する指導を提案しているように，日本の数学教育においても大切にされてきた視点である。この立場から, 渡会（2015）の提案する指導では，例えば「1.7kmは何mか。」という単位変換の問題場面において「1.7×1000=1700だから1700mである。」と解決した場合に用いられる乗法は内比を適用する乗法ではなく外比を適用する乗法であるから，児童が問題解決においてこの乗法を用いるならば，この乗法の意味づけをすることによって外比を適用する乗法の顕在化がなされる。しかしながら，渡会（2015）は学習内容についての理論的な提案をするにとどまり，小学校の児童が実際に単位変換の問題場面において外比を適用する乗法を用いうるのか，その実態については言及していない。

以上の問題意識から，本稿は小学校の児童が単位変換の問題場面において外比を適用する乗法を用いるのか，その実態を明らかにすることを目的とする。

上記の目的を達成するために，本稿では①大学生を対象とした単位変換の問題場面における解決方法についての調査，②小学校第６学年の児童を対象とした単位変換の問題場面における解決方法についての調査の２段階で実態調査を行った。本稿ではそれぞれの結果について報告する。

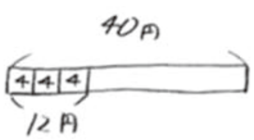
２．大学生を対象とした単位変換の問題場面における解決方法についての実態調査

⑴　調査の概要

渡会（2015）は，小学校第６学年における単位の仕組みの学習において単位変換の乗法・除法を扱うことを提案している。よって，小学校第６学年の単位の仕組みを既習とした児童が，単位変換をする際にどのような解決方法を用いるのか，その実態を明らかにする必要がある。そのための調査問題を設計するために，まず大学生を対象とした単位変換の問題場面における解決方法についての調査を実施することにした。調査の目的は，調査問題の出題方法によって単位変換の問題場面における個人の解決方法を浮き彫りにすることができるのかを検証することと，小学校の単位の学習を既習である大学生が単位変換の問題場面の解決のためにどのような方法を用いるのかを明らかにすることである。小学校第６学年の児童と大学生では学習段階に大きな開きがあるが，算数・数学科における単位についての学習は小学校第６学年までに完結していて，中学校以降に単位変換についてさらに学習することはないので，単位変換についての既習の知識は小学校第６学年と大学生では同等であると考えられる。このような理由から，大学生を対象とした調査を行うことで，小学校第６学年の児童の解決方法の傾向を見ることができると考えたのである。

では，どのような出題方法をすることで単位変換の問題場面における個人の解決方法を浮き彫りにすることができるのか。「解法を書いて，最後に解答を示す」という一般的な算数・数学科のテスト問題の出題方法では，数学的に正しい解決方法が記述されて，必ずしも被験者が素朴に思いついた方法が記述されるとは限らない。そこで，素朴に思い浮かんだ解決方法を被験者に記述してもらうために，まず「頭の中のイメージ」という解答欄を設定した。そして,「頭の中のイメージ」という解答欄だけでは，そこに記述された事柄を分析者である筆者が解釈する際に必ずしも記述された事柄の意味を被験者の考えた通りに解釈できるとは限らないため,「頭の中のイメージ」の解答欄の次に「頭の中のイメージについての説明」という解答欄も設定し,「頭の中のイメージ」に記述した内容を被験者自身に説明させるようにした。

次の　は，調査問題用紙に示した解答方法についての説明である。

> 例えば，「40円の30％はいくらですか？」と聞かれたとき，あなたはどのように考えて答えの12円を求めましたか。パッと式が思い浮かびましたか。それともテープ図や線分図のようなものが思い浮かびましたか。円グラフのようなものが思い浮かびましたか。思い浮かんだものは人それぞれだと思います。
>
> この調査ではまず，答えを求めるためにあなたの頭の中に思い浮かんだことを「頭の中のイメージ」の欄に書き出してみてください。イメージなので必ずしも数学的に厳密である必要はありません。次に，「頭の中のイメージ」で書いたことについて，どのような順で，どのように考えていったのかを「頭の中のイメージについての説明」の欄に記述してください。自分の考えの数学的な裏づけを説明する必要はありません。
>
> **例１**　頭の中のイメージ
>
> 40×0.3＝12円
>
> 頭の中のイメージについての説明
>
> 40円に30％をかければいいので，30％は0.3だから40×0.3がパッと出てきた。それを計算して12円だ。
>
> **例２**　頭の中のイメージ
>
> 
>
>
> 頭の中のイメージについての説明
>
> このような図が思い浮かんだ。全部で40円。10%分は1/10の大きさの４円。それが３つ分で12円。

調査の説明においては上記の例１，例２のような解答例も示しながらどのように解答欄に記述するのかを説明した。そして，説明後に「3.6mは何cmか。」という単位変換の問題を１題出題し，解答欄に記述させることとした。

調査は平成29年４月に，北海道教育大学札幌校の数学教育関係の３つの講義において，受講している学生計75名を対象として実施した。

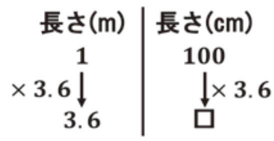
⑵　調査結果

学生たちによる解決方法は７通りに分類された。

（i）　乗法100×3.6による解決

「頭の中のイメージ」の解答欄に「100×3.6」の式を記述して360cmを求めている解決である。この解決を用いた学生は８人いた。

「3.6mは何cmか。」という問題場面における乗法100×3.6による解決は，Vergnaud（1983）の乗法的構造の枠組みで表すと図１のように表せる[※1]。



【図１】

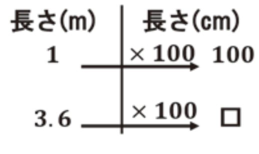
図１で示されるように，100×3.6はmを単位とする長さの測度空間において１を3.6に対応させるスカラー演算子「×3.6」を，cmを単位とする長さの測度空間における100に適用することによる操作として乗法的構造の枠組みでは説明される。そして，スカラー演算子「×3.6」は3.6倍の大きさを求めるという内比を適用する乗法に対応する。

（ii）　乗法3.6×100による解決

「頭の中のイメージ」の解答欄に「3.6×100」の式を書いて360cmを求めている解決である。この解決を用いた学生は34人いた。

「3.6mは何cmか。」という問題場面における乗法3.6×100による解決は，Vergnaud（1983）の乗法的構造の枠組みで表すと図２のように表せる。

図２で示されるように，3.6×100はmを単位と



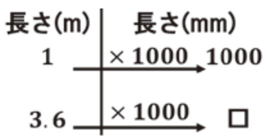
【図２】

する長さの測度空間の１をcmを単位とする長さの測度空間の100に対応させる関数演算子「×100」を，mを単位とする長さの測度空間における3.6に適用することによる操作として乗法的構造の枠組みでは説明される。そして，関数演算子「×100」は異種の２量の割合をかける乗法であるから，外比を適用する乗法に対応する。

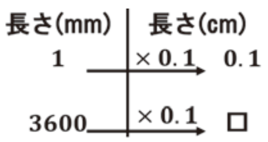
(iii)　乗法3.6×1000による解決

「頭の中のイメージ」の解答欄に「3.6m×1000＝3600mm，3600mm×0.1＝360cm」と記述している解決である。この解決を用いた学生が１人いた。

この解決で用いられている乗法3.6×1000と3600×0.1をVergnaud（1983）の乗法的構造の枠組みで表すとそれぞれ図３，図４のように表せる。



【図３】



【図４】

このように乗法3.6×1000と3600×0.1は(ii)と同様に外比を適用する乗法である。

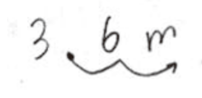
(iv)　桁に着目した解決

「頭の中のイメージ」の解答欄に図５のように小数点を移動させる表現を記述している，もしくは図６のように「０」の個数を増やす表現を記述している解決である。「頭の中のイメージ」の解答欄では解決の方法を読み取れないが，「頭の中のイメージについての説明」の解答欄に図５や図６を用いて説明している学生も含めると，この解決を用いた学生は13人いた。

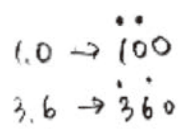
(ii)の100×3.6を「頭の中のイメージ」の解答欄に記述し，「頭の中のイメージについての説明」の解答欄に「3.6に０を２つ足した。」というように図６の場合に相当する記述をした学生が１人いたが，その解法は(ii)に属する解決とし，(iv)には含めていない。

(v)　比例式を用いた解決

「頭の中のイメージ」の解答欄に「3.6：1＝x：



【図５】



【図６】

100」や「1：100＝3.6：x」といった比例式を用いている解決である。この解決を用いた学生は２人いた。

これらの解決では比例式の後にx＝3.6×100という(ii)の式が記述されていたが，(ii)の場合は3.6×100が解答欄に最初に記述されている場合であり，この場合は比例式の計算結果としての乗法なので(ii)の分類には含めていない。

(vi)　加法的な解決

「頭の中のイメージ」の解答欄に「300＋60」や「100＋100＋100＋60」といった加法を用いた記述をしている解決である。この解決を用いた学生は11人いた。

(vii)　長さの量感による解決

「頭の中のイメージ」の解答欄では解決の方法を読み取れないが，「頭の中のイメージについての説明」の解答欄に，例えば「自分の身長がだいたい160cmで1.6mだとわかっているから，3.6mは360cmとすぐにわかる。」や「36cmか360cmか3600cmのどれかと思ったが，36cmでも3600cmでもなかったので360cmである。」というように，具体的な大きさをもとにして判断している解決である。この解決を用いた学生は５人いた。

また，２人の学生については「頭の中のイメージ」及び「頭の中のイメージについての説明」のいずれの解答欄からも，どのように解決方法を用いたのかを筆者は読み取ることができず，解決方法を断定することができなかった。

以上をまとめると，大学生による単位変換の問題場面における解決方法の反応率は次の表１のようにまとめられる。

表１：大学生の解決方法の反応率

解決方法	人数	反応率
乗法100×3.6による解決	8人	10.7%
乗法3.6×100による解決	33人	44.0%
乗法3.6×1000による解決	1人	1.3%
桁に着目した解決	13人	17.3%
比例式を用いた解決	2人	2.7%
加法的な解決	11人	14.7%
長さの量感による解決	5人	6.7%
（解法を断定できない）	2人	2.7%

⑶　調査結果についての考察

表１で示されたように，半数近くの学生が算数・数学科の単位の学習では扱っていない関数演算子を適用する乗法3.6×100によって単位変換を行っていた。

それでは，乗法3.6×100によって単位変換を行った学生は，その方法をどのような意味として説明しているのか。ほとんどの学生が，例えば「１ｍは100cmなのでほとんど反射的に3.6×100＝360でパッと解いた。」のような乗法を用いた理由を述べられていない記述や「cmを求めたいからｍに100をかけるとよい。」のような乗法を用いることを公理のように述べている記述をしていた。そんな中，１人の学生は「１ｍは100cmなので，3.6に100をかけるとcmの値が求まる。」（波線は筆者が記入）というように100をかけた理由として数値の関係に言及した記述をしていた。つまり，3.6mの100倍の大きさを求めるための「×100」ではなく，１ｍと100cmの数値の関係（１と100）に着目して「×100」をしているのである。断定はできないが，おそらく先述した乗法を用いた理由が明確ではない学生たちも解答欄には記述はされてはいなかったが同様に１ｍと100cmの数値の関係をみて「×100」をしたのではないかと考える。また，同様に数値の関係に着目したのであろうが，「１ｍが100cmであることを確認して3.6mを100倍した。」のように，3.6mの100倍の大きさは360mであって360cmではないが「3.6×100」の「×100」を「100倍」と表現している学生が５人いた。

学校数学では関数演算子の乗法を意味づけて指導してはいないので，学生たちが乗法3.6×100の意味を数学的に説明することができなかったことはある意味当然の結果である。しかし，関数演算子の乗法の意味を説明することはできなくとも，おそらく上記で示したような数値の関係に着目することによって関数演算子の乗法として説明される「3.6×100」を用いることができるようである。

以上のように，「まず頭の中に思い浮かんだことを記述させてから，それについて説明させる」という出題方法による調査によって，大学生が単位変換を行う場合には，学校数学では学習内容としては扱っていない関数演算子を適用する乗法によって単位変換を行う学生も多くいるという実態を明らかにすることができた。

３．小学校第６学年の児童を対象とした単位変換の問題場面における解決方法についての実態調査

⑴　調査の概要

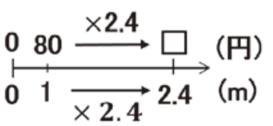
２．で示した大学生を対象とした実態調査の結果を加味して，小学校第６学年の児童が単位変換の問題場面において解決のためにどのような方法を用いるのかを明らかにすることを目的とした調査を設計した。出題方法については調査対象とするクラスの担任教諭と相談した結果，大学生と同様の「イメージ」という表現を用いた問題文の説明では児童が何を記述したらいいのかが分からないということが危惧されたため，大学生を対象とした調査問題の設計において考慮した「まず頭の中に思い浮かんだことを記述させてから，それについて説明させる」という点を踏襲しながら，小学校第６学年の児童を対象とした出題方法として次のように修正した。

> 1　3.6mは何cmでしょう。
>
> ＿＿＿＿cm
>
> 理由）

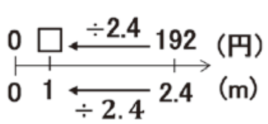
上記のように，まず3.6mが何cmであるかの解

答を記述してから，その理由を記述するという出題方法にすることで，被験者にまず素朴に求めた解答を記述させた上で，それについての理由を説明させるようにしたのである。

また，大学生を対象とした調査結果において関数演算子を適用する乗法による解決が多く見られたことから，児童たちの解決においても同様の傾向が見られると推測した。そこで，さらに小学校第６学年において単位変換の乗法・除法の指導を実践することを視野に入れて，児童による関数演算子を用いた操作についての数直線図における表現の仕方についても調査をすることにした。小学校算数科では乗法・除法の意味づけは数直線図にその操作を表現することと併せてなされる。例えば，「１mの値段が80円のリボンを2.4m買ったときの代金はいくらか。」のような問題場面における「（基準量）×（割合）」の乗法や「2.4mの代金が192円のリボンの１m分の値段はいくらか。」のような問題場面における等分除は「一方の大きさがn倍になれば，もう一方の大きさもn倍になる。」という比例関係に基づいて立式するので，図７，図８のようにスカラー演算子を用いた表現で記述される。

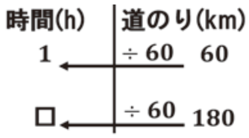


【図７】

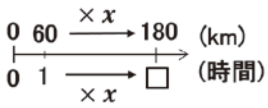


【図８】

それだけでなく，「180kmの道のりを時速60kmで進むと何時間かかるか。」のような時間を求める速さの問題場面における除法は乗法的構造では図９のように関数演算子を適用する除法として表現されるが，この除法は算数科では図10のように時間と道のりの比例関係にもとにして，$60 \times x = 180$より$x = 180 \div 60$とスカラー倍の大きさを求めることによって説明される。



【図９】



【図10】

このように小学校算数科ではスカラー演算子を数直線図に表現する学習内容は扱われているが，関数演算子を数直線図に表現する学習内容は扱われていない。しかしながら，単位変換の乗法・除法の意味づけをする際には既習のスカラー演算子の乗法・除法と区別して意味づける必要があるから，数直線図に関数演算子の操作を表現する必要がある。そこで，児童が関数演算子を用いる除法である包含除を数直線図にどのように表現するのか，その実態を明らかにするために次の問題を出題することにした。

> ②「クッキーが52個あります。１ふくろに４個ずつ入れると，何ふくろできるでしょうか。」という問題は，52÷4を計算することで答えを求めることができます。52÷4を計算することで答えを求めることができる理由を数直線図を使って説明しましょう。

以上２題を調査問題として，平成29年７月に北海道教育大学附属札幌小学校第６学年の１クラスにおいて，児童30名を対象として調査を実施した。

⑵ 調査結果

①単位変換の問題場面における解決方法

児童によって用いられた解決方法は，２．で示した大学生によって用いられた解法と同様のものに限られていた。その反応率は次の表２の通りである。

表２：児童の解決方法の反応率

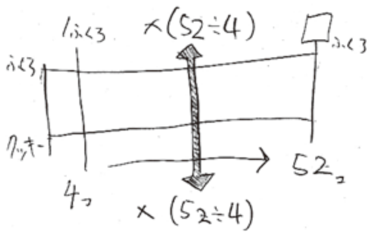
解決方法	人数	反応率
乗法100×3.6による解決	2人	6.7%
乗法3.6×100による解決	3人	10.0%
桁に着目した解決	1人	3.3%
加法的な解決	20人	66.7%
長さの量感による解決	1人	3.3%
（解法を断定できない）	3人	10.0%

②包含除の操作の数直線図における表現の仕方

児童による包含除の操作についての数直線図における表現の仕方は，大きく分けて５通りに分類された。

(i) 変化の関係の矢印を用いた説明

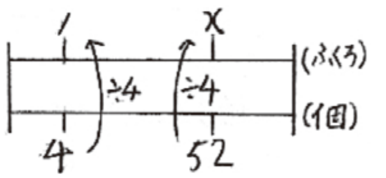
図11のようにクッキーの個数と袋の数の比例関係に基づいて倍を用いる変化の関係を矢印で表現した説明である。この方法によって説明した児童は３人いた。



【図11】

(ii) 対応の関係の矢印を用いた説明

図12のようにクッキーの個数と袋の数の対応関係を矢印で表現した説明である。この方法によって説明した児童は12人いた。



【図12】

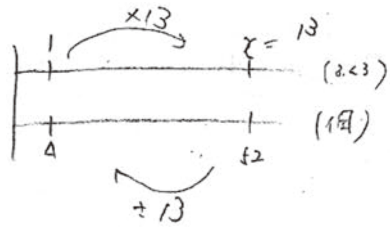
そのうちの１人は比例数直線図を描いて，対応の関係の矢印を描いていなかったが，「４を１にするには÷4，52も同じように52÷4するとできる。」というように，対応の関係の説明をしていたので，対応関係の矢印と同様の方法として分類した。

(iii) 正しい比例数直線図を描けているが，包含除の理由を説明できていない

クッキーの個数と袋の数の比例数直線図を正しく描けているが，包含除52÷4を数直線図に正しく表現できていない児童が９人いた。この分類はさらに３通りに分けられる。

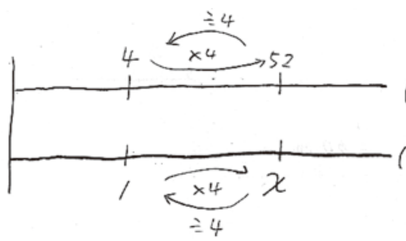
１つ目は，比例数直線図を正しく描けているが，矢印等の説明を記述していないものである。この記述をした児童が４人いた。

２つ目は，その比例数直線図に図13のように13倍の関係を矢印で記述できているが，52÷4を表現できていないものである。この記述をした児童は３人いた。



【図13】

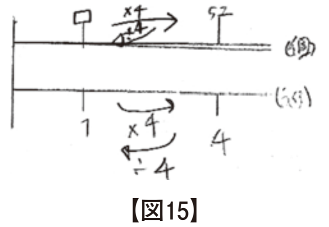
そして，３つ目は図14のように52÷4を表現するために，４倍という誤った倍の関係の矢印を記述しているものである。この記述をした児童は２人いた。



【図14】

(iv) 誤った比例数直線図を描いている

図15のように比例数直線図を描いてはいるものの，クッキーの個数と袋の数の混在している比例数直線図を描いている児童が４人いた。



【図15】

⒱　比例数直線図を描いていない

比例数直線図を描かず，線分図で説明しようとした児童が１人，アレイ図で説明しようとした児童が１人いた。

以上の結果をまとめると，小学校第６学年による包含除の操作についての数直線図における表現の仕方の反応率は次の表３のようにまとめられる。

表３：包含除の操作の表現の仕方の反応率

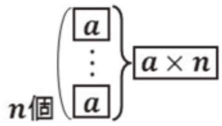
表現の仕方	人数	反応率
変化の関係の矢印	3人	10.0%
対応の関係の矢印	12人	40.0%
正しい比例数直線図	9人	30.0%
誤った比例数直線図	4人	13.3%
比例数直線図ではない	2人	6.7%

⑶　調査結果についての考察

①単位変換の解決方法についての実態

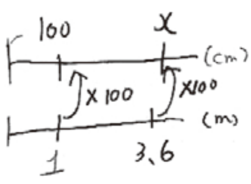
単位についての学習は小学校で完結しているため大学生と小学校第６学年の児童では単位変換の問題場面における解決は同じような傾向が見られると推察して大学生を対象とした事前調査を実施したのであるが，結果として大学生と児童では用いられやすい方法の傾向に違いがあった。即ち，大学生によって最も多く使われた単位変換の方法は関数演算子を適用する乗法であったのに対して，小学校第６学年の児童によって最も多く使われた方法は加法的な解決であった。そして，大学生の半数近くが用いていた関数演算子を適用する乗法を用いて単位変換をした児童は10％にとどまった。

この要因としては，乗法的な構造の捉えについての習熟が影響すると考えられる。乗法についての学習は小学校第２学年から始まるが，その意味づけは図16※2のように加法的な構造で特徴づけられる同数累加である（渡会，2011）。そして，第５学年の小数をかける乗法の学習において乗法的な構造での意味づけである「（基準量）×（割合）」となり，問題場面の乗法的な構造を捉えることが必要になってくる。第６学年の児童は小数の乗法・除法や分数の乗法・除法の学習を通して乗法的な構造について徐々に熟達しつつあるが，単位変換の学習の段階では単位変換の問題場面を乗法的な構造としてよりは加法的な構造としてのほうが捉えやすいようである。一方で，大学生は，算数科の単位の仕組みの学習以降において比や比例・関数といった乗法的な概念についての学習を進めることを通して乗法的な構造の捉えについて熟達し，単位変換の問題場面の構造を乗法的に捉えて，関数演算子を適用する乗法を用いることができたのだと考える。



【図16】

また，多くの児童は加法的な解決で単位変換を行ったが，人数が少ないながらも関数演算子を適用する乗法によって単位変換を行った児童もいた。その児童たちの解決の理由を見てみると，「１m＝100cm。以上より，mをcmにするにはかける100をすればよい。」や「１mは100cmだから，3.6mを100倍したら360cmになるから。」というように，大学生の解決の説明で見られたmとcmの数値の関係に着目したと考えられる説明と同様の説明がなされていた。また，別の１人は図17を記述して，関数演算子の操作「×100」を比例数直線上の対応関係の矢印として表現して説明していた。このように関数演算子を適用する乗法によって解決した児童は単位変換の問題場面の構造を乗法的に捉えることができているようである。



【図17】

②包含除の操作の表現の仕方についての実態

単位変換において関数演算子を適用する乗法を用いた児童はわずかであったが，それに対して包含除の操作を数直線図に表現する場合には関数演算子による操作を意味する対応の関係の矢印で表現した児童が半数近くいた。児童たちは，乗法的な構造を持つ問題場面における「一方がn倍になれば，もう一方もn倍になる。」という比例の変化の関係は既習であるが，「４個のクッキーが１に対応するから÷4。それを52個のクッキーに適用するから52÷4。」というような比例の対応の関係は未習である。それにもかかわらず，児童たちは図12のように対応の関係の矢印を２つ描いて包含除52÷4を説明できている。

一方で，対応の関係の矢印を描けなかった児童の多くは倍を用いる変化の関係で説明を試みたと考えられる。しかしながら，出題した包含除の問題場面を変化の関係で解釈しようとすると，52÷4で求められるものは，クッキーの個数（４個と52個）の倍関係であって，分けられる袋の数ではない。つまり，52÷4によって袋の数が求められるはずなのに，数直線図で解釈すると何倍かの大きさを求めていることになってしまうというズレが生じるのである。このズレについて，変化の関係の矢印を用いて説明した児童の１人は，「ふくろの数とクッキーの個数は比例しているので，ふくろの数も52÷4＝13倍になる。ふくろの数は１なので1×13は省略できるため，式は52÷4となる。」というように，52÷4によって直接袋の数が求められているわけではなく，「もう一方も13倍になる」という操作を省略した結果として除法52÷4によって求められることを認めていた。このような解釈ができなかった場合には，52÷4を変化の関係で表現することは困難になる。比例数直線図を正しく描けているが，矢印を描けなかった児童の中には，このズレに困り，結果として矢印を描けなかった児童もいたであろう。

図13，14，15のように表現した児童も同様のズレに困った結果と考えられる。図13のように表現した児童は，比例の変化の関係を用いて13袋を求める説明はできているが，その方法と52÷4で求めることができるものを結びつけることができなかった。図14のように表現した児童は乗法・除法は数直線図において倍の関係を表す操作という捉えにより，既習の52÷4に対応する操作を比例数直線図に表現したのであろう。そして，図15のように表現した児童は既習の52÷4の操作に対応するように数値を比例数直線図に取った結果，比例数直線図における表現が正しくなくなってしまったのだと考えられる。

このように，小学校第６学年の児童の半数近くは未習であっても包含除の操作を数直線図に対応の関係によって表現することができるが，それ以上に多くの児童が既習の変化の関係で表現しようとする傾向があるようである。

③単位変換の乗法･除法の意味指導への示唆

①②で示した実態より，現在の小学校第６学年の児童の関数演算子の使用についての傾向としては，単位変換の問題場面の構造を乗法的に捉えて関数演算子を用いて解決できる習熟段階にまで達している児童は小数であるが，乗法的な概念を説明するために必要に応じて関数演算子を使用することを容認しうる児童は半数近くいるようである。このような傾向から，子どもが問題解決において暗黙的に用いている数学的な性質を顕在化することを目指した関数演算子の乗法･除法の指導として，単位変換の問題場面において関数演算子の操作によって解決した児童の式の意味に着目し，その操作を数直線図上に表現することを通して，関数演算子の操作の意味に迫っていくという指導展開が考えられる。

具体的には，例えば「3.6mは何cmか。」を問えば児童たちは360cmという正答を求めることができるので，さらにどのような式で求められるのかを問う。そうすると，100＋100＋100＋60や300＋60といった加法の式を想起する児童が多いであろうが，3.6×100という式を想起する児童もいるであろう。そこで，3.6×100という式に着目し，その意味について検討する。そうすると，既習の乗法の意味で解釈すると3.6×100は3.6mの100倍の

大きさを意味するが，3.6mの100倍の大きさは360mであって360cmではないという不整合が生じるため，「この乗法は正しいのか。」という第一の問いが生じる。

第一の問いを解消するために，他の単位変換の場合をいくつか具体的に確かめてみると，他の場合においても同様の乗法で正しく求められそうであるということが分かる。また，他の場合を調べる中で，例えば「2400gは何kgか。」は2400÷1000で求められるというように，除法によって単位変換をすることができる場合もあることが分かってくる。これらの活動を通して，単位変換の乗法･除法の意味は既習の乗法･除法の意味では説明できないが，もとの大きさにかけたり割ったりすることで適切に単位変換をすることができそうであることを認める。そうするとさらに，「どのような場合に乗法を用いて，どのような場合に除法を用いるのか。」という第二の問いが生じる。

第二の問いについて検討する中で，既習において乗法･除法の立式は比例数直線図を用いていたことから，単位変換の場合においても比例数直線図を用いることについて考える。そうすると，比例数直線図において3.6×100を表現するためには,対応関係の矢印を用いて表現することになる。このように比例数直線図に乗法･除法を表す対応関係の矢印を表現し，その表現を認めることで，単位変換における乗法･除法の使い分けは比例数直線図における関係から判断することができるようになる。それだけでなく，既習の乗法･除法は比例数直線図において変化の関係を表す矢印で表現されていたのに対して，単位変換の乗法･除法は対応の関係の矢印として表現されることから，単位変換の乗法･除法と既習の乗法･除法との違いが明確になる。そこで，対応関係の矢印で表現される乗法･除法を既習の乗法･除法と区別して単位変換の乗法･除法として意味づけするのである。

4．まとめと今後の課題

本稿の目的は，小学校の児童が単位変換の問題場面において外比を適用する乗法を用いるのか，その実態を明らかにすることであった。そのために，大学生を対象とした単位変換の問題場面における解決方法についての調査を行ったうえで，小学校第６学年の児童を対象とした単位変換の問題場面における解決方法及び包含除の操作の数直線図における表現の仕方についての調査を行った。その結果，①大学生の半数近くが外比を適用する乗法を用いて単位変換を行ったのに対して，小学校第６学年の児童の多くは加法的に単位変換を行い，外比を適用する乗法を用いて単位変換を行う児童はごく少数に限られるという実態と，②包含除の操作を数直線図に表現する際には，第６学年の児童の半数近くが未習であるにもかかわらず外比を意味する対応関係の矢印で表現することができるという実態が明らかになった。本稿で行った調査は特定の小集団を対象として実施したものであり，調査結果をそのまま一般化することはできないが，小学校第６学年の児童の外比の認識についての傾向の一端を明らかにすることができたと考える。

今後の課題は，調査結果をもとに示した単位変換の意味指導への示唆に基づいた授業を実践して，指導を通しての児童の単位変換の乗法･除法の意味の理解及び乗法的な構造の捉えの変容を実証的に検討することである。

註

1．Vergnaud（1983）は乗法的構造の枠組みにおいて，乗法的な問題場面を単比例の構造と複比例の構造によって特徴づけている。図18は比例関係にある２つの測度空間M_1，M_2で構成される単比例の構造で，cが未知数の場合には乗法の問題場面に内在する構造になる。そして，小学校算数科において指導されている乗法は，図19のようにM_1において１をbに対応させるスカラー演算子「$\times b$」をM_2のaに適用する操作として説明される。

$$\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ 1 & a \\ & \\ b & c \end{array}$$

【図18】

$$\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ 1 & a \\ \times b \downarrow & \downarrow \times b \\ b & \square \end{array}$$

【図19】

2．n個の部分の測定数aを合成した大きさ$a+\cdots+a$（n個）を$a\times n$と定義している。

謝　辞

調査問題の設計及び実施にあたり，北海道教育大学附属札幌小学校の千葉史教諭に多大なご協力をいただきました。心から感謝いたします。

引用・参考文献

Vergnaud, G.（1983）. Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau（Eds.）. Acquisition of mathematics concepts and processes. New York; Tokyo: Academic Press. 127-175.

Vergnaud（1988）. Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr（Eds.）. Number concepts and operations in the middle grades. Hillsdale: Lawrence Erlbaun Associates. 141-161.

杉山吉茂（1986）.『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』東洋館出版社.

日野圭子（1997）.「一人の児童を通してみた数学的表記の内化の過程の分析―比例的推論との関わりにおいて―(II)」. 日本数学教育学会誌. 第79巻. 第４号. 2-10.

渡会陽平（2011）.「小学校算数科における乗除法の意味に関する学習過程の分析―G.Vergnaudの概念野理論を枠組みとして―」. 日本数学教育学会誌. 第93巻. Vol.97・98. 3-16.

渡会陽平（2015）. 算数科における比例の式に用いられる乗法についての量に対する操作による意味づけ. 日本数学教育学会　第48回秋期研究大会発表集録. 213-216.

（札幌校特任講師）