北海道教育大学学術リポジトリ
Hokkaido University of Education Repository
国立大学法人 北海道教育大学
HOKKAIDO UNIVERSITY OF EDUCATION

圓管の粘流助走距離の理論的考察 (3)

メタデータ	言語: Japanese
	出版者:
	公開日: 2012-11-07
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 澤田, 孝士
	メールアドレス:
	所属:
URL	https://doi.org/10.32150/00000158

圓管の粘流助走距離の理論的考察 (3)

澤 田 孝 士

北海道學藝大學旭川分校物理學教室

Takashi SAWADA : Theoretical Considerations of the Inlet Length of Laminar Flow, of a Circular Cylinder (3)

1. 考察の目的

前報[1]では SCHILLER の理論的考察によると，粘流助走距離 l_a と REYNOLDS 數 R，圓管の半徑 r_0 との間に

$$\frac{l_a}{r_0 R}=0.0575$$

なる關係のあることをのべた。ついで SCHILLER の方法とは別に，NAVIER-STOKES の運動方程式を基にし，境界條件を入れることによつて

$$\frac{l_a}{r_0 R}=0.0978$$

なる關係が生ずることをのべた。そしてこの差異の生ずる原因については不明である旨を記して終つた。

そののち，筆者の計算を再檢討したところ，基礎方程式に不充分な點を見出したので，本論文では改善された解の結果とそれに對する考察を報告する。

2. 改善された解

圓管座標を $r\ \theta\ z$ とし，$r\ \theta\ z$ の增す方向の速度を $u_r\ u_\theta\ u_z$ とすると，NAVIER-STOKES の運動方程式は次の如くなる[2]:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\nabla^2 u_r-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_r u_\theta}{r}$$
$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left(\nabla^2 u_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta}{r^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 u_z \tag{3}$$

但し $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

連續の條件は次の如くなる：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{4}$$

問題の性質上，軸對稱と考えてよいから，u_θ および θ に關する微分係數はすべて零となる。また定常狀態を考えるのであるから $\partial/\partial t=0$，よつて上の4式は次の如く簡單となる：

$$u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{u_r}{r^2}\right) \tag{5}$$

$$u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) \tag{6}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{7}$$

u_r を知ることは差當つて必要ではない。u_z を知るために(6)に境界條件を入れる。管壁即ち $r=r_0$ においては $u_z=0$，$\partial u_z/\partial z=0$，$\partial^2 u_z/\partial z^2=0$，更に $u_r=0$ とおくことにより

$$0=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{r=r_0}$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{r=r_0} \tag{8}$$

また軸上では SCHILLER と同樣に $\partial u_z/\partial r=0$，$\partial^2 u_z/\partial r^2=0$ と考えるから

$$\left(u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)_{r=0}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{r=0}$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)_{r=0} \tag{9}$$

となる。前報と符號を合せる爲に $z\to x$，$r\to(r_0-y)$，$u_z\to u$，$(u_z)_{r=0}=u_0$ とかくと，(8) (9)は

$$0=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y=0}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{10}$$

$$u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y=r_0}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{y=r_0} \tag{11}$$

となる。前報(15)と比較すると(10)において右邊の第三項 $-\frac{\nu}{r_0}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$ が附加されたことが判る。また(11)において右邊の第二項は ν の小なる場合には無視してもよい。これは前報(7)において SCHILLER も行つた省略である。

速度分布に對しては前と同じように

$$u=u_0\left(2\frac{y}{\delta}-\frac{y^2}{\delta^2}\right) \tag{12}$$

を假定する。したがつて

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{2u_0}{\delta} \tag{13}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0}=-\frac{2u_0}{\delta^2} \tag{14}$$

また圓管の斷面上では壓力一定と見なされるから

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=0}=\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=r_0} \tag{15}$$

である。(15)によつて(10)と(11)を結付け，かつ(13)，(14)を代入するなら

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=\frac{2\nu}{\delta^2}+\frac{2\nu}{\delta r_0} \tag{16}$$

となる。前報(4)により

$$\frac{\delta}{r_0}=2-\sqrt{6\frac{\bar{u}}{u_0}-2} \tag{17}$$

である。(17)を(16)に入れると

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=\frac{2\nu}{r_0^2\left(2-\sqrt{6\frac{\bar{u}}{u_0}-2}\right)^2}+\frac{2\nu}{r_0^2\left(2-\sqrt{6\frac{\bar{u}}{u_0}-2}\right)} \tag{18}$$

いま

$$t^2=6\frac{\bar{u}}{u_0}-2 \tag{19}$$

とおき，(18)に代入し整理すると

$$-\frac{12\bar{u}t}{(t^2+2)^2}\frac{dt}{dx}=\frac{2\nu}{r_0^2}\frac{3-t}{(2-t)^2}$$

$$\therefore\frac{t(2-t)^2}{(t^2+2)^2(3-t)}dt=-\frac{\nu}{6r_0^2\bar{u}}dx \tag{20}$$

(20)を積分するために，左邊を次の如く變形する：

$$\frac{t\cdot(2-t)^2}{(t^2+2)^2(3-t)}=\frac{154}{121}\cdot\frac{t}{(t^2+2)^2}+\frac{220}{121}\cdot\frac{1}{(t^2+2)^2}+\frac{3}{121}\cdot\frac{t}{t^2+2}-\frac{112}{121}\cdot\frac{1}{t^2+2}+\frac{3}{121}\cdot\frac{1}{3-t}$$

よつて(20)を積分した結果は

$$-\frac{77}{121}\cdot\frac{1}{t^2+2}+\frac{55}{121}\cdot\frac{t}{t^2+2}-\frac{57}{121\cdot\sqrt{2}}\cdot\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{3}{242}\cdot log(t^2+2)-\frac{3}{121}\cdot log(3-t)+C=-\frac{\nu}{6r_0^2\bar{u}}x \tag{21}$$

となる。C は積分常數で $x=0$ において $t=2$ という初期條件から定まる。$t=1$ において $x=l_a$ であるから，計算の結果

$$\frac{\nu}{6r_0^2\bar{u}}l_a=0.02236 \tag{22}$$

即ち

$$\frac{l_a}{r_0R}=0.0671 \tag{23}$$

なる關係がえられる。

3. 結　　論

前報にえた値より余程 SCHILLER の値に近付いた。しかし未だ不充分である。この不一致が如何なる原因で生じたかを考えてみたい。

SCHILLER の計算と比較すると，(11)において右邊の第二項の省略は，兩者間に差異をみとめられない。また(15)は SCHILLER の計算では現われてこないが前報(6)を求めるとき，圓管の斷面上いたる所 P=一定を假定しているから，結局同じことになる。殘る所は(10)，更にさかのぼつて(8)以外に問題になりうるものはない。

單に數學的な問題として考えるなら，(8)を求めるときの4條件のうち，$u_r=0$ を $u_r\neq0$ と改め，しかも $u_r<0$ と假定することによつて，この不一致を救うことができる筈である。何故なら(10)において右邊に $-\frac{\nu}{r_0}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$ なる項が加わつたために，l_a は前報より小となつた。もし $u_r\neq0$ とするなら，右邊に更に $u_r\frac{\partial u}{\partial y}$ が附加される。そのため補正項の絶對値は更に大となり，l_a は(22)より更に小となることが豫想される。しかし非線型偏微分方程式の性質からいつて，u_r の函數形は簡單に決定することはできない。

以上は純數學的な考察であるが，物理的には從來の實驗結果から壁面においては常に $u_r=0$ と見做されている。即ち SCHILLER の計算と一致した結果をうるためには物理的に無理な假定を必要とする。

このヂレンマを救うためには，SCHILLER の假定である(12)式を改める以外に方法はないようである。すなわち，速度分布はこのように簡單な二次式で表わさるべきでなく，更に複雜な三次，四次などの項を含んだものとすべきであろう。そして，正しい速度分布を假定するならば，l_a の値は NIKURADSE の實驗結果と一致するもの

となろう。

4. 謝　　辭

本稿を草するにあたり，京都大學教授藤本武助博士より有益なる御教示を賜つた。ここに記して謹んで御禮申上げます。

(1952.II.15)

文献

1) 澤田孝士，學藝　第II部　vol. 3, no. 1, p.10 (1951)
2) 藤本武助著，應用流體力學，丸善刊，p. 323 (1941)
3) W. MÜLLER著，本間　仁譯，粘性流體の力學，コロナ社刊，p. 72 (1942)

附記

前報に若干の誤植がありましたので訂正します。

1) p. 11 右側上から20行目

$$\rho\pi r^2 u_0{}^2 \frac{d}{dx}\left(1-\frac{14}{15}\cdot\frac{\delta}{r}+\cdots\right)$$ は

$$\rho\pi r^2 \frac{d}{dx} u_0{}^2\left(1-\frac{14}{15}\cdot\frac{\delta}{r}+\cdots\right)$$ と訂正。

2) 文中の γ は凡て r と訂正。

3) 運動粘性係數 υ は ν と訂正。

4) p. 12 右側下から3行目(21)の u は $\bar{u}$ と訂正。