



フインスラー空間に於ける部分空間のDeformation について

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2012-11-07 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 北村, 五郎 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.32150/00000219

フインスラー空間に於ける部分空間の Deformation について

北 村 五 郎

北海道学藝大学旭川分校数学教室

Goro KITAMURA : On the Deformation of a Subspace
in a Finsler Space

§ 1 序 説

n 次元 FINSLER 空間 F_n に於てその部分空間 F_m ($m < n$) を

$$(1.1) \quad x^\lambda = x^\lambda(u^i)^{1)}$$

無限小変換を

$$\bar{x}^\lambda = x^\lambda(u^i) + \xi^\lambda(x^\alpha(u^i))d\tau$$

で與えた時の *Deformation* の理論は先に DAVIES 氏²⁾ によつて取扱われています。本論文ではベクトル ξ^λ が F_m の各点でのみ定義されている時即ち無限小変換が

$$(1.2) \quad \bar{x}^\lambda = x^\lambda(u^i) + \xi^\lambda(u^i)d\tau$$

の式で與えられている時の *Deformation* を調べました。§2 では部分空間に従属する基本的なテンソル及び接続係数の変化を、§3 では ξ^λ が F_m の接空間にある時 §2 の特別な場合としてではなく別個な方法でその変化を調べてみました。以後の節では *element of support* が F_m の接空間にあると仮定します。 F_m の点 x^λ で定義された F_m に於けるテンソル $F^{\dots}(x, x')$ (\dots で表わされた指標はギリシヤ文字又はラテン文字を示す。)を点 \bar{x}^λ に *Cartan* の意味で平行移動して得られたテンソルを $\overset{*}{F}^{\dots}(\bar{x}, \bar{x}')$ で又 *Deformation* されたテンソルを $F^{\dots}(\bar{x}, \bar{x}')$ で表わしますと d の二次以上の項を無視して作られた

$$\Delta F^{\dots} = \overset{*}{F}^{\dots}(\bar{x}, \bar{x}') - F^{\dots}(\bar{x}, \bar{x}')$$

は又次の式で與えられます。即ち

$${}^n dF^{\dots} = \overset{*}{F}^{\dots}(\bar{x}, \bar{x}') - F^{\dots}(x, x')$$

$${}^* dF^{\dots} = \overset{*}{F}^{\dots}(\bar{x}, \bar{x}') - F^{\dots}(x, x')$$

(但し d の二次以上の項を無視する。)

とおきますと

$$\Delta F^{\dots} = (d - \overset{*}{d})F^{\dots}$$

今後用いる記号、関係式は DAVIES 氏²⁾ のものを採用しました。

§ 2 部分空間の Deformation

先ず射影因子 B_j^λ については (1. 2) より

$$\bar{B}_j^\lambda = B_j^\lambda + \xi_{,j}^\lambda d\tau \quad (\xi_{,j}^\lambda = \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial u^j})$$

故に

$$(2.1) \quad \overset{\circ}{d}B_j^\lambda = \xi_{,j}^\lambda d\tau$$

他方

$$(2.2) \quad \overset{*}{d}B_j^\lambda = -\omega_p^\lambda B_j^p d\tau$$

ここで ω_p^λ は (1. 2) より $\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi_{,j}^\lambda u^j d\tau$ (x^λ は任意の parameter による微分を示す。) から

$$(2.3) \quad \omega_p^\lambda = \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \xi^\sigma + C_{\rho\sigma}^\lambda \xi_{,j}^\sigma u^j d\tau$$

を表わします。

B_j^λ に対しリーマン幾何の場合と同様に $g_{ij} = B_{ij}^\lambda g_{\lambda\mu}$, $B_\lambda^i = g^{ij} g_{\lambda\mu} B_j^\mu$ を導入し m 個の接ベクトル B_j^λ によつて張られた接空間に垂直な単位法ベクトル C_p^λ 及びその共変ベクトル C_λ^p を導入して $C_{\lambda|j}^p = 0$ を仮定します。

係 CARTAN³⁾ の A-E を満足する *intrinsic connection* の係数 Γ_{jk}^i と *induce connection* の係数 $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ との間に

$$\Gamma_{ok}^i - \bar{\Gamma}_{ok}^i = -B_\mu^i H_{|jk}^{\mu 4)}$$

$$\Gamma_{jk}^i - \bar{\Gamma}_{jk}^i = 2g^{li} B_\lambda^c H_{|[ci]jk}^\lambda \quad (5)$$

この事から容易に

$$(2.4) \quad H_j^p l^j = 0$$

(2.4) を使つて (2.3) は

$$(2.5) \quad \omega_p^\lambda = \overset{*}{\Gamma}_{\rho\sigma}^\lambda \xi^\sigma + A_{\rho\sigma}^\lambda \overset{0}{D}_0 \xi^\sigma$$

とも書けますから (2.1), (2.2) と (2.5) から

$$(2.6) \quad \overset{\circ}{d}B_j^\lambda = \{ \overset{\circ}{D}_j \xi^\lambda + A_{\rho\sigma}^\lambda (B_j^p \overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma - H_j^p \xi^\sigma) \} d\tau$$

今

$$(2.7) \quad \xi_{,j}^\lambda d\tau \equiv \overset{\circ}{d}B_j^\lambda, \quad \xi_{,j}^k \equiv B_\lambda^k \xi_{,j}^\lambda, \quad \xi_{,j}^p \equiv C_\lambda^p \xi_{,j}^\lambda$$

とおき $\xi^\lambda = B_i^\lambda \xi^i + C_p^\lambda \xi^p$ に分解して

$$(2.8) \quad \overset{\circ}{D}_j \xi^\lambda = B_i^\lambda (\overset{\circ}{D}_j \xi^i + \overset{\circ}{L}_{jP}^i \xi^P) + C_p^\lambda (\overset{\circ}{H}_{ji}^{\cdot\cdot P} \xi^i + \overset{\circ}{D}_j \xi^P)$$

$$(2.9) \quad \overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma = B_i^\sigma (\overset{\circ}{D}_0 \xi^i + \overset{\circ}{L}_{0P}^i \xi^P) + C_p^\sigma (C_p^q H_i^q \xi^i + \overset{\circ}{D}_0 \xi^P)$$

を (2.6) に代入して

$$(2.10) \quad \overset{\circ}{H}_{[ij]}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{[ij]}^\sigma B_{\sigma}^\lambda A_{\rho\sigma}^\lambda$$

を用いますと

$$(2.11) \quad \begin{cases} \xi^k_j = \overset{\circ}{D}_j \xi^k + (\overset{\circ}{L}_{jR}^k + A_{ji}^k \overset{\circ}{L}_{0R}^i - A_{RQ}^k C_p^Q H_j^p) \xi^R + A_{ji}^k \overset{\circ}{D}_0 \xi^i + A_{jt}^k \overset{\circ}{D}_0 \xi^R \\ \xi^P_j = \overset{\circ}{D}_j \xi^P + \overset{\circ}{H}_{ij}^P \xi^i + (A_{ji}^P \overset{\circ}{L}_{0R}^i - A_{RQ}^P C_p^Q H_j^p) \xi^R + A_{ji}^P \overset{\circ}{D}_0 \xi^i + A_{jR}^P \overset{\circ}{D}_0 \xi^R \\ (A_{ji}^k = B_{\alpha ji}^{k\beta\gamma} A_{\beta\gamma}^\alpha, \quad A_{jR}^k = B_{\alpha j}^{k\beta} C_{R\beta}^\gamma A_{\beta\gamma}^\alpha \dots) \end{cases}$$

F_m の基本テンソル $g_{ij} = B_{ij}^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu}$ に d を施して $d g_{ij} = \Delta g_{ij}$, (2.1), $d g_{\lambda\mu} = (g_{\lambda\mu,\sigma} \xi^\sigma + g_{\lambda\mu}{}^\sigma \xi^\sigma_{,j} \xi^j) d$: と $\overset{\circ}{\nabla}_\rho g_{\lambda\mu} = 0$ に注意して

$$\Delta g_{ij} = 2 \xi_{\tau(i}^{\lambda} B_{j)\tau}^{\mu} g_{\lambda\mu} d\tau$$

が得られますから

$$(2.12) \quad \Delta g_{ij} = 2 g_{k(i} \xi_{j)k}^k d\tau$$

反変基本テンソル g^{ij} については $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$ に d を施し (2.12) を用いて

$$(2.13) \quad \Delta g^{ij} = -2 g^{k(i} \xi_{j)k}^j d\tau$$

又 $g_{\mu\nu} B_j^\mu C_p^\nu = 0$ について $d C_p^\nu = -\omega_p^\nu C_l^\nu d\tau + \Delta C_p^\nu$ から

$$(2.14) \quad B_\nu^i \Delta C_p^\nu = -g^{ij} g_{FQ} \xi_j^Q d\tau \quad (g_{FQ} = C_{FQ}^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu})$$

で決定します。今

$$(2.15) \quad \zeta_\tau^i d\tau \equiv B_\nu^i \Delta C_\tau^\nu, \quad \zeta_\tau^Q d\tau \equiv C_p^Q \Delta C_p^\nu, \quad \Delta C_p^\nu \equiv \zeta_p^\nu d\tau$$

とおきますと

$$(2.16) \quad \Delta C_p^\nu = (B_i^\nu \zeta_p^i + C_p^Q \zeta_p^Q) d\tau$$

g_{FQ} については直ちに

$$(2.17) \quad \Delta g_{FQ} = 2 \zeta_{(F,Q)} d\tau \quad (\zeta_{F,Q} = g_{QI} \zeta_F^I)$$

又 $B_\lambda^i B_j^\lambda = \delta_j^i$, $B_\lambda^i C_\lambda^i = 0$ から

$C_\lambda^P C_Q^\lambda = \delta_Q^P$, $B_i^\lambda C_\lambda^i = 0$ から

$$(2.19) \quad \Delta C_\lambda^P = -(B_\lambda^k \xi_{P,k}^P + C_\lambda^Q \zeta_Q^P) d\tau$$

が得られます。

次に F_m に導入された induce connection の係数 $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ から作られた

$$(2.20) \quad \Gamma_{jk}^i = \bar{\Gamma}_{jk}^i - \bar{A}_{ji}^i \bar{\Gamma}_{ik}^k = B_k^i (B_{jk}^k + \Gamma_{\mu k}^\mu B_j^\mu)$$

ここで

$$(2.21) \quad \Gamma_{\mu k}^\mu = \overset{\ast}{\Gamma}_{\mu\nu}^\mu B_k^\nu + A_{\mu\nu}^\mu H_k^\nu$$

$$(2.22) \quad H_j^\lambda = C_\kappa^\lambda (B_{ij}^\kappa + \overset{\ast}{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa B_{ij}^{\mu\nu}) l^i$$

を調べる爲に先ず $l^i = B_p^i l^p$ によって導入せられた $d l^i$ を調べてみます。

フインスラー空間に於ける部分空間の Deformation について

$$\begin{aligned} \overset{r}{dl} &= (\omega_\rho^\alpha B_\alpha^i d\tau + \mathcal{A}B_\rho^i) l^\rho + B_\rho^i \overset{r}{dl}^\rho \\ &= \{(\overset{*}{\Gamma}_{0\sigma}^\alpha \xi^\sigma B_\alpha^i - \xi^i_{,k} l^k) + B_\alpha^i (l_{,\sigma}^\alpha \xi^\sigma + l_{,\sigma}^\alpha \xi^\sigma_{,j} l^j)\} d\tau \end{aligned}$$

こゝで (2.4) と

$$(2.23) \quad \begin{cases} l_{,\sigma}^\alpha = -l^\alpha \frac{1}{L} L_{,\sigma} = -l^\alpha l_{\beta} \overset{*}{\Gamma}_{0\sigma}^{\beta\gamma} \\ l_{,\sigma}^\alpha = \delta_\sigma^\alpha - l^\alpha l_\sigma \end{cases}$$

及び (2.9), (2.11) を用いて

$$\overset{r}{dl} = -l^j (\overset{\circ}{D}_0 \xi^j + \overset{\circ}{L}_{0P}^j \xi^P) d\tau$$

且

$$l_j \overset{\circ}{L}_{0P}^j = l_\mu l^k \overset{\circ}{D}_k C_P^\mu = -l^k C_P^\mu \overset{\circ}{D}_k l_\mu = 0$$

よつて

$$(2.24) \quad \overset{r}{dl} = -l^j \overset{\circ}{D}_0 \xi^j d\tau$$

が得られます。次に H_j^λ については

$$\overset{r}{d}C_\kappa^\lambda (B_{ij}^\kappa + \overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa B_{ij}^{\mu\nu}) l^\lambda = -\omega_\rho^\lambda H_j^\rho d\tau + (C_\kappa^\lambda \omega_\rho^\kappa d\tau + \mathcal{A}C_\rho^\lambda) (B_\kappa^\rho \Gamma_{0j}^\rho + H_j^\rho)$$

ですから右辺に (2.5) と

$$\mathcal{A}C_\rho^\lambda = \mathcal{A}C_\rho^\lambda C_\rho^P + C_\rho^\lambda \mathcal{A}C_\rho^P = \mathcal{A}C_\rho^\lambda C_\rho^P + C_\rho^\lambda (B_\rho^\xi \xi_{,\mu}^\mu d\tau + C_\rho^\xi \mathcal{A}C_\xi^\rho)$$

を代入して整理しますと

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \overset{r}{d}C_\kappa^\lambda (B_{ij}^\kappa + \overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa B_{ij}^{\mu\nu}) l^\lambda \\ = C_\kappa^\lambda \{ \xi^k_{,k} \Gamma_{0j}^\kappa + H_j^\gamma (\overset{*}{\Gamma}_{\nu\sigma}^\kappa \xi^\sigma + A_{\rho\sigma}^\kappa \overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma) \} d\tau - \mathcal{A}B_\rho^\lambda H_j^\rho - \omega_\rho^\lambda H_j^\rho d\tau \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \overset{r}{d}B_{ij}^\kappa l^\lambda = \xi^k_{,i,j} l^k d\tau = [\overset{\circ}{D}_j \overset{\circ}{D}_i \xi^k - \xi^k_{,i} \Gamma_{\sigma j}^\kappa - \xi^k_{,j} \Gamma_{\sigma i}^\kappa + \xi^k_{,k} \Gamma_{ij}^\kappa \\ - \xi^\sigma (\Gamma_{\sigma i,j}^\kappa - \Gamma_{\sigma j,i}^\kappa) \Gamma_{0j}^\kappa + \Gamma_{\sigma i}^\rho \Gamma_{\rho j}^\kappa - \Gamma_{\sigma k}^\rho \Gamma_{ij}^\kappa] l^\lambda d\tau \\ \overset{r}{d}\overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa = \{ \overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma}^\kappa \xi^\sigma + \overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma}^\kappa (\overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma - \xi^\rho \overset{*}{\Gamma}_{\rho 0}^\sigma) \} d\tau \end{aligned}$$

を用いて

$$(2.26) \quad \begin{aligned} C_\kappa^\lambda \overset{r}{d}(B_{ij}^\kappa + \overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa B_{ij}^{\mu\nu}) l^\lambda = C_\kappa^\lambda [\overset{\circ}{D}_j \overset{\circ}{D}_0 \xi^k - \overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma A_{\sigma\nu}^\kappa H_j^\nu + \xi^k_{,k} \Gamma_{0j}^\kappa + \overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma}^\kappa B_{ij}^{\mu\nu} \overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma \\ - \xi^\sigma \{ (\overset{*}{R}_{\mu,\sigma\nu}^\kappa B_{ij}^\nu + \overset{*}{\Gamma}_{\sigma\mu,\lambda\nu}^\kappa H_j^\lambda) l^\mu + \overset{*}{\Gamma}_{\sigma\nu}^\kappa H_j^\nu \}] d\tau \end{aligned}$$

(2.24), (2.25) と (2.26) から

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \overset{r}{d}H_j^\lambda = C_\kappa^\lambda [\overset{\circ}{D}_j \overset{\circ}{D}_0 \xi^k + \overset{*}{\Gamma}_{0\nu,\sigma}^\kappa B_{ij}^\nu \overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma + (\overset{*}{R}_{0,\nu\sigma}^\kappa B_{ij}^\nu - \overset{*}{\Gamma}_{0\sigma,\lambda\nu}^\kappa H_j^\lambda) \xi^\sigma] d\tau \\ - H_j^\lambda l_k \overset{\circ}{D}_0 \xi^k d\tau - \omega_\rho^\lambda H_j^\rho d\tau - \mathcal{A}B_\rho^\lambda H_j^\rho \end{aligned}$$

これから

$$(2.28) \quad \Delta H_j^\lambda = C_\kappa^\lambda [\overset{\circ}{D}_j \overset{\circ}{D}_0 \xi^\kappa + \overset{*}{I}_{0\nu|\sigma}^\kappa B_j^\nu \overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma + (\overset{*}{R}_{0,\nu\sigma}^\kappa B_j^\nu - \overset{*}{I}_{0\sigma|\nu}^\kappa H_j^\nu) \xi^\sigma - H_j^\lambda \overset{\circ}{D}_k \xi^\kappa] d\tau - \Delta B_\rho^\lambda H_j^\rho$$

値 Γ_{jk}^i については

$$\begin{aligned} & \overset{\circ}{\Delta} B_\kappa^i (B_{jk}^\kappa + \Gamma_{\mu k}^\kappa B_j^\mu) \\ &= \{ \omega_\kappa^\rho B_\rho^i (B_{jk}^\kappa + \Gamma_{\mu k}^\kappa B_j^\mu) - (B_\kappa^i \xi_{,\alpha}^i + C_\kappa^{\rho\zeta} \zeta_{,\rho}^i) (\overset{\circ}{H}_{kj}^{\cdot\cdot\alpha} + B_\alpha^i \Gamma_{jk}^i) \} d\tau \\ &= B_\kappa^i \{ \omega_\rho^\kappa (B_{jk}^\rho + \Gamma_{\mu k}^\rho B_j^\mu) - \xi_{,\alpha}^i \Gamma_{jk}^i \} d\tau + \overset{\circ}{H}_{kj}^{\cdot\cdot\alpha} \Delta B_\alpha^i \end{aligned}$$

ですから

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{d}\Gamma_{jk}^i &= B_\kappa^i [\overset{\circ}{d}\Gamma_{\mu k}^\kappa B_j^\mu + \{ \omega_\rho^\kappa (B_{jk}^\rho + \Gamma_{\mu k}^\rho B_j^\mu) - \xi_{,\alpha}^i \Gamma_{jk}^i + \xi_{,j,k}^i + \Gamma_{\mu k}^\kappa \xi_{,\rho}^\mu \} d\tau] \\ &+ \overset{\circ}{H}_{kj}^{\cdot\cdot\alpha} \Delta B_\alpha^i \end{aligned}$$

ここで $\xi_{,j|\alpha}^i = \omega_{\rho|\alpha}^\kappa B_j^\rho$ より

$$\xi_{,j,k}^i + \Gamma_{\rho k}^\kappa \xi_{,\rho}^i - \xi_{,\alpha}^i \Gamma_{jk}^i + \omega_\rho^\kappa B_{jk}^\rho = \overset{\circ}{D}_k \xi_{,\rho}^i - \omega_{\mu,k}^\kappa B_j^\mu + \omega_{\mu|\alpha}^\kappa B_j^\mu \Gamma_{0k}^i - \omega_\mu^\rho \Gamma_{\rho k}^\kappa B_j^\mu$$

を用いて

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{d}\Gamma_{jk}^i &= B_\kappa^i [\overset{\circ}{d}\Gamma_{\mu k}^\kappa B_j^\mu + \{ (\omega_\rho^\kappa \Gamma_{\mu k}^\rho - \omega_\mu^\rho \Gamma_{\rho k}^\kappa - \omega_{\mu,k}^\kappa + \omega_{\mu|\alpha}^\kappa \Gamma_{0k}^i) B_j^\mu \\ &+ \overset{\circ}{D}_k \xi_{,\rho}^i \} d\tau] + \overset{\circ}{H}_{kj}^{\cdot\cdot\alpha} \Delta B_\alpha^i \end{aligned}$$

なお

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{d}\Gamma_{\mu k}^\kappa &= \{ (\overset{*}{R}_{\mu\nu,\sigma}^\kappa \xi^\sigma + \overset{*}{I}_{\mu\nu|\sigma}^\kappa \xi_{,\rho}^{\sigma\rho}) B_k^\nu + \overset{*}{I}_{\mu\nu}^\kappa \xi_{,\rho}^{\nu\rho} + (A_{\mu\nu,\sigma}^\kappa \xi^\sigma + A_{\mu\nu|\sigma}^\kappa \xi_{,\rho}^{\sigma\rho} \\ &\times \rho) H_k^\nu - A_{\mu\nu}^\kappa \omega_\rho^\nu H_k^\rho \} d\tau + A_{\mu\nu}^\kappa \Delta H_k^\nu \end{aligned}$$

においては $\xi_{,\rho}^{\sigma\rho} = \overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma - \xi^\alpha \overset{*}{I}_{0\alpha}^\sigma$, $\xi_{,\rho}^{\nu\rho} = \overset{\circ}{D}_k \xi^\nu - \xi^\alpha \overset{*}{I}_{\alpha k}^\nu$ を用いて ξ^σ , $\overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma$, $\overset{\circ}{D}_k \xi^\sigma$ について、同様に $\omega_\rho^\kappa \Gamma_{\rho k}^\kappa - \omega_\mu^\rho \Gamma_{\rho k}^\kappa$, $\omega_{\mu|\alpha}^\kappa$ においては ξ^σ , $\overset{\circ}{D}_k \xi^\sigma$ について、 $\omega_{\mu,k}^\kappa$ においては ξ^σ , $\overset{\circ}{D}_k \xi^\sigma$, $\overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma$, $\overset{\circ}{D}_k \overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma$ について整理して

(2.29) に代入して $\overset{\circ}{d}\Gamma_{jk}^i \equiv \Delta \Gamma_{jk}^i$ なる事から

$$(2.30) \quad \begin{aligned} C_{,\mu k}^\kappa &= \{ \overset{*}{R}_{\mu,\nu\sigma}^\kappa B_k^\nu + (A_{\mu\nu,\sigma}^\kappa - \overset{*}{I}_{\mu\sigma|\nu}^\kappa) H_k^\nu \} \xi^\sigma + \{ \overset{*}{I}_{\mu\nu|\sigma}^\kappa B_k^\nu \\ &- \overset{\circ}{D}_k A_{\mu\sigma}^\kappa + (A_{\mu\nu|\sigma}^\kappa - A_{\mu\alpha}^\kappa A_{\sigma\nu}^\alpha) H_k^\nu \} \overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma + A_{\mu\sigma}^\kappa \overset{\circ}{D}_k \overset{\circ}{D}_0 \xi^\sigma + A_{\mu\sigma}^\kappa \Delta H_k^\sigma \end{aligned}$$

とおきますと

$$(2.31) \quad \Delta \Gamma_{jk}^i = B_\kappa^i [C_{,\mu k}^\kappa B_j^\mu + \overset{\circ}{D}_k \xi_{,\rho}^i] d\tau + \overset{\circ}{H}_{kj}^{\cdot\cdot\alpha} \Delta B_\alpha^i$$

同様な方法によつて *Einspannung* の接続係数 λ_{Qk}^P について

$$(2.32) \quad \Delta \lambda_{Qk}^P = C_{,\mu k}^P [C_{,\mu k}^\kappa C_Q^\mu + \overset{\circ}{D}_k \xi_{,\rho}^{\kappa\rho}] d\tau - \overset{\circ}{L}_{k,Q}^\alpha \Delta C_\alpha^P$$

又リーマン幾何の場合と同様に $T_{,j\rho}^\lambda$ については

フインスラー空間に於ける部分空間の Deformation について

$$(2.33) \quad (\Delta \overset{\circ}{D}_k - \overset{\circ}{D}_k \Delta) T_{,j}^\lambda = T_{,j\rho}^\rho C_{,\rho k}^\lambda d\tau - T_{,\rho j}^\lambda \Delta \Gamma_{jk}^\rho - T_{,j\rho}^\lambda \Delta \lambda_{\rho k}^0 - T_{,j\rho}^\lambda \Delta \Gamma_{ik}^\rho d^i$$

になりますから

$$(2.34) \quad \Delta \overset{\circ}{H}_{kj}^{\lambda} = [B_j^\rho C_{,\rho k}^\lambda + \overset{\circ}{D}_k \xi_{,j}^\lambda] d\tau - B_a^\lambda \Delta \Gamma_{jk}^a$$

が成立します。

§ 3 部分空間を自分自身に移す無限小変換について

この場合の無限小変換は次式で與えられます。

$$(3.1) \quad \begin{cases} \bar{x}^\lambda(u^i) = x^\lambda(u^i) + \xi^\lambda(u^i) d\tau \\ \bar{\xi}^\lambda(u^i) = B_j^\lambda \xi^j \end{cases}$$

element of support は F_m に接していますから $x'^\lambda = B_j^\lambda u'^j$ となり従つて第一近似として

$$(3.2) \quad \begin{cases} \bar{x}^\lambda(u^i) = x^\lambda(u^i) + B_j^\lambda \xi^j d\tau \equiv x^\lambda(u^i + \xi^i d\tau) \\ \bar{x}'^\lambda(u^i, u'^i) = B_j^\lambda u'^j + (B_{jk}^\lambda \xi^k u'^i + B_j^\lambda \xi_{,k}^i u'^k) d\tau \equiv x'^\lambda(u^i + \xi^i d\tau, u'^i + \xi_{,k}^i u'^k d\tau) \end{cases}$$

が得られますから (3.1) なる無限小変換によつて parameter u^i に対し $u^i \rightarrow u^i + \xi^i d\tau$ なる変換が生じます。今

$$(3.3) \quad \bar{u}^i = u^i + \xi^i(u) d\tau$$

とおきますとこの点変換によつて点 \bar{u}^i に於ける射影因子 $\overset{n}{B}_j^\lambda$ は (3.1) から

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \overset{n}{B}_a^\lambda &= \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial \bar{u}^a} = (B_j^\lambda + \xi_{,j}^\lambda d\tau)(c_a^j - \xi_{,a}^j d\tau) = B_a^\lambda + (\xi_{,a}^\lambda - B_j^\lambda \xi_{,a}^j) d\tau \\ &= B_a^\lambda + B_{ja}^\lambda \xi^j d\tau \equiv B_a^\lambda(u^i + \xi^i d\tau) \end{aligned}$$

となり $\overset{n}{B}_a^\lambda$ と $B_a^\lambda(\bar{u}^i)$ が一致します。今

$$(3.5) \quad \begin{cases} P_j^i = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} = \delta_j^i + \xi_{,j}^i d\tau \\ Q_a^i = \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^a} = c_a^i - \xi_{,a}^i d\tau \end{cases}$$

とおきますと (3.4) から

$$(3.6) \quad \bar{B}_j^\lambda = P_j^a \overset{n}{B}_a^\lambda$$

又

$$\bar{g}_{ij} = \bar{B}_{ij}^\mu g_{\lambda\mu}(\bar{x}, \bar{x}') = P_{ij}^{ab} B_{ab}^\mu g_{\lambda\mu}(\bar{x}, \bar{x}') = P_{ij}^{ab} g_{ab}$$

即ち

$$(3.7) \quad \bar{g}_{ij} = P_{ij}^{ab} g_{ab}$$

$g_{ij} \bar{g}^{jk} = \delta_i^k$ から

$$(3.8) \quad \bar{g}^{ij} = Q_a^i Q_b^j g^{ab}$$

(3.7), (3.8) より

$$(3.9) \quad \bar{B}_\lambda^i = \bar{g}^{ij} g_{\lambda\mu}(\bar{x}, \bar{x}') \bar{B}_j^\mu = Q_a^i \overset{n}{B}_\lambda^a$$

$\overset{n}{B}_\alpha^\lambda$ と $B_\alpha^\lambda(\bar{u})$ が一致しますから $\overset{n}{g}_{ab}$ と $g_{ab}(\bar{u}, \bar{u}')$, $\overset{n}{g}_{ab}$ と $g^{ab}(\bar{u}, \bar{u}')$, $\overset{n}{B}_\lambda^\alpha$ と $B_\lambda^\alpha(\bar{u}, \bar{u}')$ とが一致します。この事から

$$(3.10) \quad \begin{cases} \overset{n}{C}_P^\lambda = C_P^\lambda(\bar{u}, \bar{u}') \\ \overset{n}{C}_\lambda^P = C_\lambda^P(\bar{u}, \bar{u}') \end{cases}$$

と仮定する事が出来ます。

諸一方 $\overset{n}{B}_j^\lambda$ 及び \bar{B}_j^λ で張られた接 m 空間は一致しますから $\overset{n}{C}_P^\gamma$ と \bar{C}_P^γ 及び $\overset{n}{C}_\gamma^P$ と \bar{C}_γ^P との間に夫々次式が成立します。

$$(3.11) \quad \begin{cases} \bar{C}_P^\gamma = (\partial_P^\gamma + M_P^\alpha d\tau) \overset{n}{C}_R^\gamma \\ \bar{C}_\gamma^P = (\partial_R^P + N_R^\alpha d\tau) \overset{n}{C}_\gamma^R \end{cases}$$

ここで (3.10) を使って $\overset{n}{C}_R^\gamma$ を TAYLOR 展開しますと

$$(3.12) \quad \bar{C}_P^\gamma = C_P^\gamma + (M_P^R C_R^\gamma + C_{P,j}^\gamma \xi^j + C_{P||j}^\gamma \xi^j l^k) d\tau$$

他方

$$(3.13) \quad \bar{C}_P^\gamma = C_P^\gamma + (-\omega_P^\gamma C_P^\gamma + \zeta_P^\gamma) d\tau$$

ですから (3.12) と (3.13) より

$$\begin{aligned} M_P^R C_R^\gamma &= -\{C_{P,j}^\gamma \xi^j + C_{P||j}^\gamma \xi^j l^k + (\Gamma_{Pj}^\gamma \xi^j + A_{P\sigma}^\gamma B_j^\sigma \overset{\circ}{D}_0 \xi^j) C_P^\gamma\} + \zeta_P^\gamma \\ &= -\{(\overset{\circ}{D}_j C_P^\gamma + C_{P||j}^\gamma \Gamma_{0j}^\gamma + C_{Rj}^\gamma \lambda_{Pj}^R) \xi^j + C_{P||j}^\gamma \xi^j l^k + A_{P\sigma}^\gamma B_j^\sigma C_P^\gamma \overset{\circ}{D}_0 \xi^j\} + \zeta_P^\gamma \end{aligned}$$

ここで $C_{P||j}^\gamma = -2B_j^\gamma A_{dP}^i$ ですから

$$(3.14) \quad M_P^R = -\lambda_{Pj}^R \xi^j - A_{Pj}^R \overset{\circ}{D}_0 \xi^j + \zeta_P^R + R_P^R$$

但し R_P^R は $R_P^R C_R^\gamma = 0$ を満足する任意の函数であります。

同様にして

$$(3.15) \quad N_R^P = \lambda_{Rj}^P \xi^j + A_{Rj}^P \overset{\circ}{D}_0 \xi^j - \zeta_R^P + S_R^P$$

但し S_R^P は $S_R^P C_\gamma^R = 0$ を満足する任意の函数であります。

又 $\bar{C}_P^\gamma \bar{C}_\gamma^S = C_P^\gamma C_\gamma^S = \partial_P^S$ から

$$(\partial_P^R + M_P^S d\tau)(\partial_Q^S + N_Q^S d\tau) \overset{n}{C}_R^\gamma \overset{n}{C}_\gamma^Q = \partial_P^S$$

従つて

$$(3.16) \quad M_P^S + N_P^S = 0, \quad M_P^R N_R^S = 0$$

係 F_m の接空間にある反変ベクトル $w^\lambda = B_\lambda^i w^i$ について

$$(3.17) \quad \bar{w}^\lambda = \bar{B}_\lambda^i w^\lambda(\bar{x}, \bar{x}') = Q_\alpha^i \overset{n}{B}_\lambda^\alpha w^\lambda(\bar{x}, \bar{x}') = Q_\alpha^i w^\alpha$$

即ち \bar{w}^λ は w^α を点 $(u^i + \xi^i d\tau)$ から点 (u^i) へ *mitgeschlepen* した \bar{w}^λ に一致しますから $\Delta w^\lambda = \bar{w}^\lambda - w^\lambda$ は (3.3) の点変換による LIE derivative と一致します。

フインスラー空間に於ける部分空間の Deformation について

同様にして F_m の共変ベクトルについても言えますから一般に F_m の接空間に含まれるテンソル T^i_{jk} に対し ΔT^i_{jk} は (3.3) の点変換による LIE derivative と一致する事が導かれます。

又 F_m の接空間に垂直な反変ベクトル $v^\nu = C_P^\lambda v^P$ については ${}^n v^P = v^P(\bar{n}, \bar{w})$ に注意して

$$(3.18) \quad \bar{v}^P = \bar{C}_\alpha^P v^\alpha(\bar{x}, \bar{x}') = (\delta_R^P - M_R^P d\tau) \overset{n}{C}_\alpha^R v^\alpha(\bar{x}, \bar{x}') = {}^n v^P - M_R^P v^R d\tau$$

ですから

$$(3.19) \quad \Delta v^P = \bar{v}^P - v^P = \{v_{ij}^P \xi^j + v_{ik}^P (\overset{\circ}{D}_0 \xi^k - \xi^j \Gamma_{0j}^k) + (\lambda_{ij}^P \xi^j + A_{ij}^P \overset{\circ}{D}_0 \xi^j - \zeta_{ij}^P) v^R\} d\tau \\ = \{\overset{\circ}{D}_j v^P \xi^j + v_{ij}^P \overset{\circ}{D}_0 \xi^j + (A_{Rj}^P \overset{\circ}{D}_0 \xi^j - \zeta_R^P) v^R\} d\tau$$

同様にして共変ベクトル v_P について

$$(3.20) \quad \Delta v_P = \{\overset{\circ}{D}_j v_P \xi^j + v_{Pj} \overset{\circ}{D}_0 \xi^j - (A_{Pj}^R \overset{\circ}{D}_0 \xi^j - \zeta_P^R) v_R\} d\tau$$

が得られます。

次に $\Delta \Gamma_{jk}^i$ について調べる爲に先ず (3.6) を u^k について偏微分しますと

$$(3.21) \quad \bar{B}_{jk}^\lambda = P_{j,k}^\alpha \overset{n}{B}_\alpha^\lambda + P_{jk}^{\alpha\lambda} \overset{n}{B}_{\alpha\beta}^\lambda$$

又

$$(3.22) \quad \bar{C}_\alpha^\nu = \bar{C}_P^\nu \bar{C}_\alpha^P = (\delta_P^\nu + M_P^\nu d\tau) (\delta_Q^P - M_Q^P d\tau) \overset{n}{C}_\nu^Q \overset{n}{C}_\alpha^Q = \overset{n}{C}_\alpha^\nu$$

(3.6), (3.17), (3.21) と (3.22) から

$$(3.23) \quad \bar{H}_j^\nu = \bar{C}_\alpha^\nu (B_{ij}^\alpha + \overset{*}{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha(\bar{x}, \bar{x}') B_{ij}^{\beta\gamma}) \bar{l}^i = P_j^\alpha \bar{H}_\alpha^\nu$$

この事から

$$(3.24) \quad \bar{\Gamma}_{\mu k}^\lambda = \overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x}, \bar{x}') \bar{B}_k^\nu + A_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x}, \bar{x}') \bar{H}_k^\nu = P_k^\alpha \overset{n}{\Gamma}_{\mu\alpha}^\lambda$$

従つて

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \bar{B}_\lambda^i (\bar{B}_{jk}^\lambda + \bar{\Gamma}_{\mu k}^\lambda \bar{B}_j^\mu) \\ = Q_c^i \overset{n}{B}_\lambda^c (P_{j,k}^\alpha \overset{n}{B}_\alpha^\lambda + P_{jk}^{ab} \overset{n}{B}_{ab}^\lambda + P_{kj}^{\alpha\lambda} \overset{n}{\Gamma}_{\mu\alpha}^\lambda \overset{n}{B}_b^\mu)$$

ですから

$$(3.25) \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i = Q_a^i P_{j,k}^a + Q_a^i P_{jk}^{ab} \overset{n}{\Gamma}_{ba}^a$$

この事から $\Delta \Gamma_{jk}^i$ は (3.3) の点変換による LIE derivative に外なりません。

リーマン幾何の場合と同様にして ΔH_{ij}^{λ} を求める事が出来ます。

終りに種々御指導下さいました恩師河口・桂田両先生に衷心より感謝致します。

(註)

- 1) ギリシャ文字は $1 \sim n$, ラテン小文字は $1 \sim m$. ラテン大文字は $m+1 \sim n$ 迄取るものとします。
- 2) E. T. DAVIES ; Subspace of Finsler Space. Proc. London Math. Soc. Ser. 2 vol. 49 1945
- 3) E. CARTAN ; Les Espaces de Finsler Actualités Scientifiques et Industrielle 79. 1934
- 4), 5), 6), 9) 2) の (26), (27), (30). (17) 参照
- 7) 3) の37参照
- 8) J. A. SCHOUTEN ; Einführung in die neueren Methoden der Differential Geometrie Band 1. p. 140
参照