幾何学的性質の集合論的一考察

第５巻 第１号　　北海道学藝大学紀要　　昭和29年２月

幾何学的性質の集合論的一考察

大　場　將　寛

北海道学藝大学岩見沢分校数学教室

Masahiro OBA : A study of geometrical properties by *set theory*

緒　　言

三次元 Euclid 幾何学、 特に Affine 幾何学の性質、例えば三垂線の定理や Desargues の定理を考察するには、元来模型を描く直観的な方法をとつていますが、私は束の見地に立つて、記号と作用との間に私なりの定義を與えて、其等既明の色々な定理を簡單に証明してみようと思います。

尙執筆に当り有益な御批判や御指導を賜つた北大の桂田芳枝助教授、並びに私と同室の矢野晋平助教授の御二人に対しまして、玆に厚く御礼申し上げます。

§１ 記号と定義

三つの集合族 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{P}$ に於て $\mathfrak{A}$ の元を A, B, C ; $\mathfrak{L}$ の元を l ; $\mathfrak{P}$ の元を P とする時、此等の間には

(1) $\mathfrak{A} \ni A, B, C$ なる A, B, C に対し

(2) $A \cup B \subset l$ なる l が一意的に $l \subset \mathfrak{L}$

(3) $A \cup B \cup C \subset P$ なる P が一意的に $P \subset \mathfrak{P}$

なる関係が在るものとする。

我々はこのような元 A, B, C を点 ; l を直線 ; P を平面と呼ぶことにする。

而る時、此等の点、直線、平面の間には Hilbert の公理が満されているものとする。

註 Hilbert の公理系については中村幸四郎訳ヒルベルト幾何学基礎論を参照のこと。

定義Ｉ 集合は相補モヂル束とする。

記號 特にことわらない限り点は A, B, C, D …… 直線は a, b, c, d……, 平面は P, Q, R, S…… で表わす。

定義Ⅱ

(1.1) $a \cap b = a$ 　なる時二直線 a, b は一致する。
これを $a=b$ と表わす。

(1.1′) $a \cup b = a$ 　なる時二直線 a, b は一致する。
これを $a=b$ と表わす。

(1.2) $a \cap b = A$ 　なる時二直線 a, b は一点 A で交わる。

(1.3) $a \cap b = 0$ 　なる時二直線 a, b は交わらない。

(1.4) $a \cap b = 0$ 　且つ
$a \cup b \subset P$ 　なる時二直線 a, b は平面 P 上に在つて平行。
これを $a//b$ と表わす。

(2.1) $P \cap Q = P$ 　なる時二平面 P, Q は一致する。
これを $P=Q$ と表わす。

(2.1′) $P \cup Q = P$ 　なる時二平面 P, Q は一致する。
これを $P=Q$ と表わす。

(2.2) $P \cap Q = a$ 　なる時二平面 P, Q は直線 a で交わる。

(2.3) $P \cap Q = 0$ 　なる時二平面 P, Q は交わらず平行。
これを $P//Q$ と表わす。

(3.1) $a \cap P = a$ 　なる時直線 a は平面 P 上に在る。
これを $P \supset a$ と表わす。

(3.1′) $a \cup P = P$ 　なる時直線 a は平面 P 上に在る。
これを $P \supset a$ と表わす。

(3.2) $a \cap P = A$ 　なる時直線 a と平面 P は一点 A で交わる。

(3.3) $a \cap P = 0$ 　なる時直線 a と平面 P は交わらず平行。
これを $a//P$ と表わす。

§２ 二平面の交わり

定義Ⅲ

(1.1) $a \ni A$, $a \ni B$; $A \cap B = 0$ なる時
$a \supset A \cup B$ 　なる a は唯一つ存在。

(1.2) $P \ni A$, $P \supset a$ なる時

$P\supset a\cup A$ なる P は唯一つ存在。

(2.1) $P\ni A,\ P\ni B$; $A\cap B=0$ なる時

$a\supset A\cup B$ なる a を考えると $P\supset a$.

(2.2) $P\cap Q\supset a$ 且つ $\bar{a}\ni A$ なる A をとり

$P\cap Q\not\ni A$ なる時

$P\cap Q=a$ (但し $\bar{a}$ は a の余集合)

定理 I 二平面の交わりは唯一つの直線である。

証明 二平面 P,Q が交われば少くとも二点 A,B を共有するから $P\supset A\cup B\quad Q\supset A\cup B$

二点 A,B で決定する直線を a とすれば $a\supset A\cup B$

定義 III (2.1) により $P\supset a,\ Q\supset a$ となり

$P\cap Q\supset a$ (1)

今 $\bar{a}\ni C$ なる C をとり $P\cap Q\ni C$ とすれば

(1)により $P\cap Q\supset a\cup C$

故に $P\supset a\cup C\quad Q\supset a\cup C$

定義 III (1.2) により $P=Q$ 之は仮定に反する。

故に $\bar{a}\ni C$ なる C をとると $P\cap Q\not\ni C$ (2)

定義 III (2.2) によると(1)、(2)から $P\cap Q=a$

定理 2 二つづつ相交わる三平面 P,Q,R の交線を a,b,c とする時、a と b とが交われば c もまたその交点を通る。

証明 $P\cap Q=a,\ Q\cap R=b,\ R\cap P=c$

$a\cap b=A$ とすれば

$A=a\cap b=(P\cap Q)\cap(Q\cap R)$

$=P\cap Q\cap R\subset R\cap P=c$

§ 3 平面と直線との平行

定理 3 二直線 a,b が平行な時、一般に a は b を含む平面 P と平行である。

証明 $a//b$ 故 $a\cap b=0,\quad Q\supset a\cup b$ なる Q が存在

$P\supset b$ 故 $P\cap Q=b$ とすれば

$0=a\cap b=a\cap(P\cap Q)=P\cap(a\cap Q)=P\cap a$

定義 II (3,3) により $a/\!/P$

定義 III

(1.3) $a//b$ の時 $P\supset a\cup b$ なる平面 P は唯一つ存在。

(1.4) $b\cap c\ni B$ で $a//b,\ a//c$ なる時 $b=c$

即ち一点を通り一直線に平行な直線は唯一つ

定理 4 直線 a に平行な二直線 b と c は互に平行。

証明 a,b,c が同時に同一平面上に在る時は明白。

a,b,c が同時に同一平面上にない時

$a/\!/b$ 故 $P\supset a\cup b$ なる平面 P を考えると $P\supset a$ (1)

今 $b\ni B$ なる B をとり $Q\supset c\cup B$ なる平面 Q を考え

$P\cap Q=d$ とすると $P\supset d$ (2)

定理3によると $Q\supset c\cup B$ 故 $Q\supset c$ で $a//c$ なら $a//Q$

故に $a\cap Q=0$ 勿論 $a\cap d=0$ (3)

(1), (2), (3) より $a//d$

$P\supset a\cup b$ で $b\ni B$ 故 $P\ni B$ 一方 $Q\supset c\cup B$ より $Q\ni B$

従つて $P\cap Q=d\ni B$ 定義 III (1.4) によれば

$a//b,\ a//d$; $b\ni B,\ d\ni B$ より $b=d$ (4)

次に $P\supset a,\ a//c$ なら定理3より $c//P$

故に $c\cap P=0$ 勿論 $c\cap d=0$ (5)

$Q\supset c\cup B$ より $Q\supset c$ 一方 $P\cap Q=d$ より $Q\supset d$ (6)

(5), (6) より $c//d$ (4)より $c//b$

定理 5 一直線 a と一平面 P が平行な時、a を含む二平面 Q,R が P と交わる直線を b,c とすれば、a,b,c のうち、どの二つも平行である。

証明 $Q\supset a$ で $P\cap Q=b$ より $Q\supset b$

$a\cap b=a\cap(P\cap Q)=(a\cap P)\cap Q=0\cap Q=0$

$R\supset a$ で $P\cap R=c$ より $R\supset c$

$a\cap c=a\cap(P\cap R)=(a\cap P)\cap R=0\cap R=0$

故に $a//b\quad a//c$ で定理4より $b//c$

定義 III (2.3) $a=b\cap P$ なる時 $a=b$

定理 6 一つの直線 a に平行な二つの平面 P,Q の交線 b は a と平行である。

證明 $b\ni B$ なる B をとる。

$R\supset a\cup B$ なる R を考えると $R\supset a$ (1)

$R\cap P=c$ とすると $R\supset R\cap P=c$ (2)

$R\cap P=c$ より $P\supset c$

然るに $a\cap P=0$ 故、勿論 $a\cap c=0$ (3)

(1), (2), (3) より $a//c$

亦 $R\cap Q=d$ とすると $R\supset R\cap Q=d$ (2)′

$R\cap Q=d$ より $Q\supset d$

然るに $a\cap Q=0$ 故、勿論 $a\cap d=0$ (3)′

(1), (2)′, (3)′ より $a//d$

次に $P\cap Q=b\ni B$ より $P\ni B$ 又 $R\supset a\cup B$ より $R\ni B$

故に $P\cap R=c\ni B$

亦 $P\cap Q=b\ni B$ より $Q\ni B$ 又 $R\supset a\cup B$ より $R\ni B$

故に $Q\cap R=d\ni B$

$a//c,\ a//d$; $c\ni B,\ d\ni B$ より $c=d$

故に $c=c\cap d=(R\cap P)\cap(R\cap Q)$

$=(P\cap Q)\cap R=b\cap R$ で $b=c$

故に $b=c=d$ となり $a//b$

§ 4 平行なる平面

定理 7 平行な二平面 P,Q が第三の平面 R と直線 a,b で交わる時、二つの交線 a,b は互に平行である。

証明 $P\cap R=a,\quad Q\cap R=b$ とすると

$P,R\supset a\quad Q,R\supset b$ となる。

$P//Q$ より $P\cap Q=0$ 勿論 $a\cap b=0$ で $a//b$

定義 III (1.5) $a\cap b=A,\ P\supset a\cup b$ なる平面 P は唯一

つ存在する。

定理 8 平面 P に平行な直線 a, b が点 A で交わる時、a, b で定められる平面 Q は P と平行である。

証明 $P \nparallel Q$ とし $P \cap Q = c$ とすると $Q \supset c$

仮定 $Q \supset a \cup b$ より $Q \supset a, Q \supset b$ であるから

$$a \cap c = a \cap (P \cap Q) = (a \cap P) \cap Q = 0 \cap Q = 0$$

$$b \cap c = b \cap (P \cap Q) = (b \cap P) \cap Q = 0 \cap Q = 0$$

故に $a // c, b // c$ で定理4の推移性より $a // b$

これは $a \cap b = A$ に反するから、$P \cap Q = 0$ 即ち $P // Q$

定義 Ⅱ (2.3′) $P \cap Q \cap R \cap \cdots\cdots \cap S = 0$ なるとき $P // Q // R // \cdots\cdots // S$ とする。

定理 9 平面 P に平行な平面 Q と R は互に平行である。

證明 $P \cap Q = 0$ $P \cap R = 0$

故に $(P \cap Q) \cap (P \cap R) = P \cap Q \cap R = 0$

故に $P // Q // R$ 勿論 $Q // R$

§5 ねじれの位置にある二直線

定義 Ⅲ (1·6) $P \cap Q \supset b$ で $a // P, a // Q$ なる時 $P = Q$（一直線を含み直線に平行な平面は唯一つ存在）

定義 Ⅳ 1 $a \cup b \subset P$ なる平面 P が存在しない時、二直線 a, b はねじれの位置にある。

定義 Ⅳ 1′ $a \cap b = 0$ 且つ $a \nparallel b$ なる時、二直線 a, b はねじれの位置にある。

定理10 ねじれの位置にある二直線 a, b の一方を含み、他方に平行な平面 P は唯一つ存在する。

証明 $P \supset b$

定義 Ⅲ (1.4) により $b \ni B$ なる点 B をとると $b \cap c = B, a // c$ なる直線 c が唯一つ存在する。

定義 Ⅲ (1.5) により $b \cap c = B, b \cup c \subset P$ $(P \supset c)$ なる平面 P が唯一つ存在する。

定理3により $a // c, P \supset c$ であるから $a // P$

定義 Ⅲ (1.6) により $b \subset P, a // P$ なる平面 P は唯一つ存在する。

定理11 ねじれの位置にある直線 a, b 外の一点 C を通り、a, b と交わる直線 c が存在することがある。

證明 定義 Ⅲ (1,2) により $P \supset b \cup C$ なる平面Pが唯一つ必らず存在する。

(1) $a \cap P = A$ なる点 A が存在するとすれば
定義 Ⅲ (1.1) により $c \supset A \cup C$ なる直線 c が存在することになるが
定義 Ⅲ (2.1) により $P \supset c$ となるから

(2) $b \cap c = B$ $(b \nparallel c)$ なる点 B が存在するとすれば、

即ち(1), (2)の條件が満される時に限り直線 c が存在。

§5 Desargues の定理

定理12 異なる平面 π_1, π_2 上にそれぞれ $\varDelta A_1B_1C_1$, $\varDelta A_2B_2C_2$ が在り、$A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ の三連結直線 $a; b; c$ が一点 T を通るならば、$A_1, B_1; A_2, B_2; B_1, C_1; B_2, C_2; C_1, A_1; C_2, A_2$ の連結直線を夫々 $p_1; p_2; q_1; q_2; r_1; r_2$ とし、$p_1, p_2; q_1, q_2; r_1, r_2$ の交点を各々 $P; Q; R$ とすると、P, Q, R は π_1, π_2 の交線 l 上に在る。(*Desargues* の定理)

證明 定義 Ⅲ (1.5) により

$a \cap b = T$ 故 $a \cup b \subset \alpha$ なる平面 α が存在する。
勿論 $\alpha \ni A_1, A_2, B_1, B_2$

$b \cap c = T$ 故 $b \cup c \subset \beta$ なる平面 β が存在する。
勿論 $\beta \ni B_1, B_2, C_1, C_2$

$c \cap a = T$ 故 $c \cup a \subset \gamma$ なる平面 γ が存在する。
勿論 $\gamma \ni C_1, C_2, A_1, A_2$

故に $\alpha \ni A_1, \alpha \ni B_1; A_1 \cap B_1 = 0$ $p_1 \supset A_1 \cup B_1$
$\alpha \ni A_2, \alpha \ni B_2; A_2 \cap B_2 = 0$ $p_2 \supset A_2 \cup B_2$

定義 Ⅲ (2.1) により $\alpha \supset p_1$ $\alpha \supset p_2$
同様に $\beta \supset q_1$ $\beta \supset q_2$ 又 $\gamma \supset r_1$ $\gamma \supset r_2$

定義 Ⅲ (2.1) により、同様にして
$\pi_1 \supset p_1, q_1, r_1$ $\pi_2 \supset p_2, q_2, r_2$

定理1により $\alpha \cap \pi_1 = p_1$ $\alpha \cap \pi_2 = p_2$ となつて、仮定により $\pi_1 \cap \pi_2 = l$ 故 $p_1 \cap p_2 = P$ を考えると
定理2より $l \ni P$
同様に $l \ni Q$ $l \ni R$ が証明される。

定理13 $p_1 \cap p_2 = P, q_1 \cap q_2 = Q, r_1 \cap r_2 = R$ 且つ $\pi_1 \cap \pi_2 = l \ni P, Q, R$ ならば $a \cap b \cap c = T$ なる一点 T が存在する。(*Desargues* の定理の逆)

證明 定義 Ⅲ (1.5) により

$p_1 \cap p_2 = P$ 故 $p_1 \cup p_2 \subset \alpha$ なる平面 α が存在する。
$q_1 \cap q_2 = Q$ 故 $q_1 \cup q_2 \subset \beta$ なる平面 β が存在する。
$r_1 \cap r_2 = R$ 故 $r_1 \cup r_2 \subset \gamma$ なる平面 γ が存在する。

定理2より $\alpha \cap \beta = b, \beta \cap \gamma = c, \gamma \cap \alpha = a$
とすれば $a \cap b \cap c = T$ なる一点 T が存在する。

§7 直　交

最後に角の計量を導入してみます。

定義 直線と直線、直線と平面、平面と平面とのなす角は従来通りのものを採用して垂直を $\perp$ で表わします。

定義 Ⅴ (1·1) $a \cap P = A, P \supset b \cup c, b \cap c = A$ なる b, c が $a \perp b, a \perp c$ ならば、直線 a と平面 P は点 A で直交するといい、$a \cap P = A, a \perp P$ と表わす。

定義 Ⅴ (1.2) $P \supset b \cup c, a \perp b, a \perp c$ なる時直線 a と平面 P は垂直であるといい、$a \perp P$ と表わす。

定義Ⅴ 2　$P\cap Q=c,\ c\perp R,\ Q\cap R=a,\ R\cap P=b$ なる $a,\ b$ が $a\perp b$ ならば、二平面 $P,\ Q$ は直線 c で直交するといい、$P\cap Q=c,\ P\perp Q$ と表わす。

定理14　平面 P 外の一点 A を通り、P と P 上の直線 b に垂直な直線 $a,\ l$ が P と交わつて出来る二つの交点を結ぶ直線 c は b と垂直である。（三垂線の定理）

證明　定義Ⅲ（2.1）により　$P\supset c$　故　$P\supset b\cup c$

然るに $a\perp P$ 故定義Ⅴ（1.2）より $a\perp b,\ a\perp c$

仮定では $l\perp b$ 故定義Ⅴ（1.2）より $Q\supset a\cup l$ なる平面 Q を考えると $b\perp a,\ b\perp l$　故　$b\perp Q$　なり。

然るに $Q\supset c$　故　$b\perp c$

定理15　直線 a が平面 P に垂直であれば、a を含む平面 Q は P に垂直である。

證明　$Q\supset a,\ a\perp P$　故　$a\cap P=A,\ \ P\cap Q=c$　とすれば、定義Ⅴ（1.1）により

$a\cap P=A,\ P\supset b\cup c,\ b\cap c=A,\ a\perp b,\ a\perp c$ なる如き b が存在して、当然　$a\cap b=A$　となる。

今 $b\perp c$ ならしめれば $b\cap c=A$ 故定義Ⅲ（1.5）より $a\cup b\subset R$ なる平面 R が存在するからこれを考えると $c\cap R=A,\ R\supset a\cup b,\ a\cap b=A,\ c\perp a,\ c\perp b$ なる定義Ⅴ（1.1）の條件が充され $c\cap R=A,\ c\perp R$ で $P\cap Q=c,\ c\perp R,\ Q\cap R=a,\ R\cap P=b,\ a\perp b$ なる定義 Ⅴ 2 の條件がそろい、$P\cap Q=c\ \ P\perp Q$

定理16　三平面が二つづつ互に直交する時、それらの交線も二つづつ互に直交する。

證明　$P\perp Q,\ Q\perp R$　なら当然　$Q\perp R\cap P=b$

然るに　$Q\supset a\cup c$　であるから

定義Ⅴ（1.2）により　$b\perp a,\ b\perp c$

同様に　$c\perp a$　も出る。

定義Ⅲ（1.7）$a/\!/P,\ a\subset Q\ \ P\perp Q$, なる平面 Q は唯一つ存在する。

定義Ⅲ（1.8）（$Q\supset a\cup B$ なる時）点 B より直線 a に下した垂線は唯一つ存在する。

定理17　ねじれの位置にある二直線 $a,\ b$ に共通な垂線は唯一つ存在する。

證明　$P\supset b$ とすれば、定理10より

$P\supset b,\ a/\!/P$　なる平面 P は唯一つ存在する。

定義Ⅲ（1.7）により $a/\!/P,\ \ a\subset Q,\ \ P\perp Q$ なる平面 Q は唯一つ存在するから、$P\cap Q=c$ なる直線 c は唯一つ決定されて、　定理5により

$a/\!/P,\ Q\supset a,\ P\cap Q=c$　であるから　$a/\!/c$

故に　$b\cap c=B$　なる点 B は唯一つ存在して、定義Ⅲ（1,8）より B から a に下した垂線は唯一つ存在する。