



光弾性効果による光線の変調とその応用研究(第3報) : AT-cut水晶振動子の応力-光学係数の計算

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2012-11-07 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 山形, 積治 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.32150/00002507

光弾性効果による光線の変調とその応用研究

第3報 AT-cut 水晶振動子の応力-光学係数の計算

山 形 積 治

北海道教育大学旭川分校物理学教室

Study on the Applications of the Light Modulation by
the Dynamic Photo-Elastic Effect
Report No. 3 Reduction of the Stress-Optical Coefficients
for the AT-cut Quartz Crystal Plate

Sekiji YAMAGATA

Physics Laboratory, Asahikawa College, Hokkaido University of Education
Asahikawa 070

Abstract

The purposes of this study are to reduce the stress-optical coefficients $C'_i(\varrho)$ for the AT-cut quartz crystal plate and to measure the stress distributions of a plano-convex AT-cut quartz crystal plate. The $C'_i(\varrho)$ coefficients depend on the direction angle ϱ of the incident probe light beam measured from the Z' -axis of the AT-cut Coordinate. It is well known that when a bounded AT-cut quartz crystal plate is excited in a resonant thickness shear mode, the flexure motions of the plate are frequently coupled. $C'_1(\varrho)$ has a maximum value for $\varrho=0$, while $C'_6(\varrho)$ is zero the same angle.

Thus the stress T'_1 of the flexural motion can be observed separately from the stress T'_6 of the thickness shear motion by making the beam direction parallel to the Z' -axis of the AT-cut coordinate. Conversely T'_6 can be measured separately from T'_1 by selecting the probe light beam direction at 30 degrees from the Z' -axis.

The computed $C'_i(\varrho)$ coefficients and the measured results of stress distribution are described in this paper.

1. 緒 言

第1報においては、水晶振動子の動的な光弾性効果の理論的な検討を行い、Jones vector, Jones matrixを導入し、光変調における方位角の問題を主に扱った¹⁾。又、第2報においては、水晶振動子による変調の光学バイアスの変化に対する変調出力の線形性について、実験的な検討を行った²⁾。

この報告においては水晶振動子によって変調を行う場合の応力-光学係数について、理論的に誘導し、合せて、実験的な裏付けを行う。特に実験にはAT-cut 水晶板を主に用いるので、これに対する応力-光学係数を導入し、AT-cut 板が厚味上り振動を行っている場合の応力の分布を解析する。水晶を極めて小さな電気系-機械系エネルギー結合係数の状態で励振すると、振動子はほぼ機械的自由振動を行うものと考えられる³⁾。

2. AT-cut 水晶振動子の光変調

水晶振動子に共振電界を印加して励振を行い、このときの動応力によって、水晶中を透過した光線に光変調をかける場合、光変調の要因には次の3通の効果が考えられる⁴⁾⁵⁾。

(1) 動的弾性効果による位相変調

水晶は印加電界の周波数に共振した機械的な振動を行っているために内部に動的応力（又は動的ひずみ）が発生する。この中を偏光光線が透過すると応力に応じて偏光の常光線と異常光線との間に相対的な位相差角を生ずる。

これを検光子を通して観測すると輝度の変調として検出される。水晶においては電気-光学効果も存在するが水晶の共振時には上記の効果に比較して、この効果は無視できる。

(2) 方位角の微小振動による変調

水晶の機械的振動に伴ってあらかじめ偏光子によってセットされた方位角も微小な振動を行う。方位角の振動は検光子を出た光線の輝度を変化させ、光変調を与える。

(3) 旋光角の微小振動による変調

水晶には光学的活性が存在し水晶中を透過した直線偏光光線の振動面を透過距離に比例して回転させる。水晶の振動に伴ってこの旋光性に関与する係数が振動し、この影響によって旋光角も振動し光線に変調を与える。

著者の別な研究で明らかのように、入射光線と水晶の光軸の間の角によって上述3要因の光変調に与える影響が決定される⁴⁾。光軸に対して入射光線の方向が10度以上傾いた場合には、後2者による光変調は第1番目の要因による光変調に比較して無視できることがわかった。

AT-cut 板では光線を主面 ($X'-Z'$ 面) に平行に透過させた場合、この面に平行にかなる方向から光線を進めても水晶の光軸 (Z 軸) に対する入射光線の角度は $35^{\circ}15' \sim 90^{\circ}$ の範囲をとるので(1)の要因に対して(2)及び(3)の要因は1/1000以下のオーダーとなり無視される。従って、AT-cut 水晶振動子の主面に平行に光線を入射させて、光変調を行う場合は(1)の要因の動的弾性効果のみで扱える⁵⁾。

水晶の x 軸に対して Fig. 1 のように偏光子(OP)、検光子(OA)がおかれた場合、検光子を出光線の輝度は

$$I = I_0 \{ \cos^2 \chi - \sin 2\phi \sin 2(\phi - \chi) \sin^2 \delta / 2 \} \tag{1}$$

と示される。分 $\chi = \pi/2$ (直交=コル) とした場合、

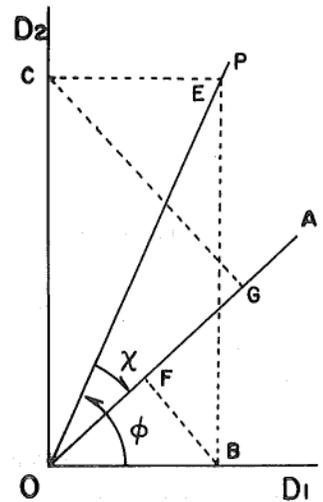


Fig. 1 Construction of the vibration components transmitted by a polarizer (OP) and analyzer (AO).

$$I = I_0 \sin^2 2\phi \sin^2 \delta / 2 \quad (2)$$

となる⁶⁾。但し ϕ は方立角で δ は常光線と異常光線との間の位相差角であって

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_{ij} - n_{rs}) - \frac{\pi h}{\lambda} n_o^3 (\pi_{ab} - \pi_{cb}) T_b^0 \quad (3)$$

となる。第1項は水晶が天然に有する複屈折で δ の直流分あるいは光学的バイアスである。第2項目は応力 T_b による光弾性を示し、水晶が振動しているとき、角共振周波数を ω_k とすれば応力は $T_b^0 = T_b \cos \omega_k t$ となるから光変調の交流成分である。従って、係数 $(\pi_{ab} - \pi_{cb})$ を特定の方向の光線について計算しておけば光変調の深さを測定することによって、動応力の絶対値 T_b を求めることが可能である。 $(\pi_{ab} - \pi_{cb}) n_o^3 \pi / \lambda$ を応力-光学係数と呼ぶ、 π_{ab} 、 π_{cb} は圧光学係数 (piezo-optical coefficient) である。

3. 特定方向の光線に対する応力光学係数

結晶の屈折楕円体は一般に

$$B_1 x^2 + B_2 y^2 + B_3 z^2 = 1 \quad (4)$$

where $B_1 = \frac{1}{n_1^2}$, $B_2 = \frac{1}{n_2^2}$, $B_3 = \frac{1}{n_3^2}$

と示される。上式は各々の座標軸が結晶軸と一致するようにとってある。今、もっぱら AT-cut 板を扱うので、座標軸を Fig. 2 のように AT-cut 座標軸に変換すると(4)式は

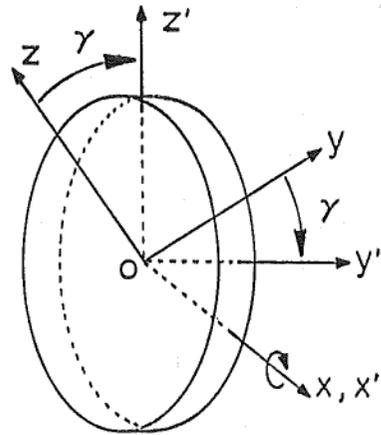
$$B'_{11} x'^2 + B'_{22} y'^2 + B'_{33} z'^2 + 2B'_{23} y' z' + 2B'_{13} x' z' + 2B'_{12} x' y' = 0 \quad (5)$$

のような形式になり、附録2の二次テンソルの変換式により、AT-cut では $\gamma = 35^\circ 15'$ で $\phi = \psi = 0$ であるから、方向余弦は Table A 2-2 より

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \gamma, & \alpha_{12} &= 0, & \alpha_{13} &= \sin \gamma \\ \alpha_{21} &= 0, & \alpha_{22} &= 1, & \alpha_{23} &= 0 \\ \alpha_{31} &= -\sin \gamma, & \alpha_{32} &= 0, & \alpha_{33} &= \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となり、変換マトリックスは (A2.5) の式によって

$$F_1 = [a_{ki} a_{lj}] = \begin{pmatrix} \cos^2 \gamma & 0 & \sin^2 \gamma & 0 & -2\sin \gamma \cos \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2 \gamma & 0 & \cos^2 \gamma & 0 & 2\cos \gamma \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ \cos \gamma \sin \gamma & 0 & -\sin \gamma \cos \gamma & 0 & \cos \gamma \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (7)$$



$\gamma = 35^\circ 15'$
 (x, y, z) original coordinate
 (x', y', z') AT-cut coordinate

Fig. 2 AT-cut quartz crystal coordinate system.

となるから

$$B'_{kl} = F_1 B_{ij} \quad (8)$$

より,

$$\left. \begin{aligned} B'_{11} &= \cos^2 \gamma \cdot B_{11} + \sin^2 \gamma \cdot B_{33} = 4.186 \times 10^{-1} \\ B'_{22} &= B_{22} = 4.202 \times 10^{-1} \\ B'_{33} &= \sin^2 \gamma \cdot B_{11} + \cos^2 \gamma \cdot B_{33} = 4.169 \times 10^{-1} \\ B'_{23} &= 0 \\ B'_{13} &= \cos \gamma \cdot \sin \gamma \cdot B_{11} - \sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot B_{33} = 2.303 \times 10^{-1} \\ B'_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となる. 伯し水晶においては $n_o = 1.54366$, $n_e = 1.55171$ であるから, $B_{11} = B_{22} = 1/n_o^2 = 4.20203 \times 10^{-1}$, $B_{33} = 1/n_e^2 = 4.15316 \times 10^{-1}$ を用いて計算した.

今, AT-cut 板に固定した座標系 $x'-y'-z'$ において, Fig. 3 の op の方向に光線を進めると常光線, 異常光線の振動方向は op に垂直な楕円平面内にあり, その方向は楕円面の長軸に一致する. 従って同図に示してあるように(5)式を(9)式の結果にもとづいて整理した

$$\begin{aligned} B'_{11}x'^2 + B'_{22}y'^2 + B'_{33}z'^2 \\ + 2B'_{13}x'z' = 1 \end{aligned} \quad (10)$$

上式を新しい座標系 $x''-y''-z''$ に変換した場合の x'' の係数 B''_{11} の最大, 最小を求めれば AT-cut 板座標系 $x'-y'-z'$ で op の方向に進む光線に対する常光線, 異常光線に対応する屈折率を求めることができる. B''_{11} の最大, 最小値は次のようにして計算する. 附録 (A2.4), (A2.5) 式, 及び Table A2.2 の方向余弦の表を用いて,

$$\begin{aligned} B''_{11} &= \alpha_{1i} \alpha_{1i} B'_{ij} \\ &= \alpha_{11}^2 B'_{11} + \alpha_{21}^2 B'_{22} + \alpha_{31}^2 B'_{33} + 2\alpha_{31} \alpha_{11} B'_{13} \\ &= (\cos \varphi \cos \Omega \cos \Psi - \sin \varphi \sin \Psi)^2 B'_{11} \\ &\quad + (\sin \varphi \cos \Omega \cos \Psi + \cos \varphi \sin \Psi)^2 B'_{22} \\ &\quad + (-\sin \Omega \cos \Psi)^2 B'_{33} \\ &\quad + 2(-\sin \Omega \cos \Psi)(\cos \varphi \cos \Omega \cos \Psi \cos \Psi - \sin \varphi \sin \Psi) B'_{13} \\ &= \{\cos^2 \varphi \cos^2 \Omega \cos^2 \Psi - (\sin 2\varphi \sin 2\Psi \cos \Omega)/2 + \sin^2 \varphi \sin^2 \Psi\} B'_{11} \\ &\quad + \{\sin^2 \varphi \cos^2 \Omega \cos^2 \Psi + (\sin 2\varphi \sin 2\Psi \cos \Omega)/2 + \cos^2 \varphi \sin^2 \Psi\} B'_{22} \\ &\quad + \sin^2 \Omega \cos^2 \Psi B'_{33} \end{aligned}$$

(18)

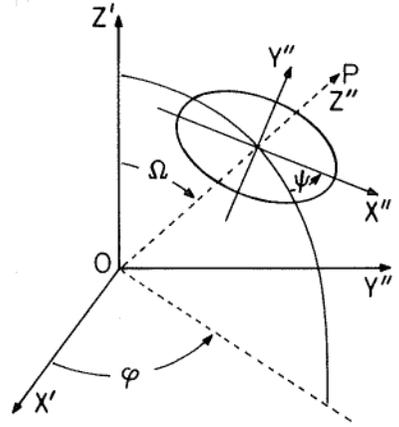


Fig. 3 Roted axes and angles relating them to the unrotated axes, P : light beam direction.

$$+(\sin\Omega\sin\varphi\sin 2\Psi - \sin 2\Omega\cos^2\Psi\cos\varphi)B'_{13} \quad (11)$$

となる。光線が op 方向に進んでいるとき、 B'_{11} の最大、最小値は角 Ψ を一転させたとき、 $\partial B'_{11}/\partial\Psi = 0$ を満す場合に存在する。即ち

$$\tan 2\Psi = \frac{-B'_{11}\sin 2\varphi\cos\Omega + 2B'_{13}\sin\varphi\sin\Omega + B'_{22}\cos\Omega\sin 2\varphi}{B'_{11}(\cos^2\Omega\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - B'_{13}\sin^2\Omega\cos\varphi + B'_{22}(\cos^2\Omega\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) + B'_{33}\sin^2\Omega} \quad (12)$$

を満足する角 Ψ で B'_{11} の最大、最小値が存在する。

(12)式を(11)式に代入し整理すると

$$2B'_{11} = K_1 \pm \sqrt{K_2} \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} K_1 &= 2B'_{22} + (B'_{11} - B'_{22})(\cos^2\Omega\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\ &\quad + (B'_{33} - B'_{22})\sin^2\Omega \\ &\quad - B'_{13}\sin 2\Omega\cos\varphi, \\ K_2 &= (B'_{11} - B'_{22})^2(\cos^2\Omega\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 \\ &\quad + 2(B'_{11} - B'_{22})(B'_{33} - B'_{22})\sin^2\Omega(\cos^2\Omega\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \\ &\quad + (B'_{33} - B'_{22})^2\sin^4\Omega \\ &\quad - 2(B'_{11} - B'_{22}) \cdot B'_{13}\sin 2\Omega\cos\varphi(\cos^2\Omega\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\ &\quad - 2(B'_{33} - B'_{22}) \cdot B'_{13}\sin 2\Omega\cos\varphi \\ &\quad + (2B'_{13})^2\sin^2\Omega(\cos^2\Omega\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \end{aligned}$$

となる。一方水晶は一軸性の結晶であるから、 B'_{11} の最大値は $1/n_o^2$ で最小値は $1/n_e^2$ となるはずである。故に(13)式で

$$K_1 = 1/n_o^2 + 1/n_e^2, \quad \sqrt{K_2} = 1/n_o^2 - 1/n_e^2 \quad (14)$$

と置換することが可能である。 n_o と n_e はほぼ等しいので近似式を用いて

$$\begin{aligned} \sqrt{K_2} &= 1/n_o^2 - 1/n_e^2 = (n_e - n_o)(n_e + n_o)/n_o^2 n_e^2 \doteq 2(n_e - n_o)/n^3 \\ \text{where } n &= \sqrt{n_o n_e} \end{aligned} \quad (15)$$

とおける。資料通過後の常光線と異常光線との位相差は偏光の振動面が B'_{11} の最大、最小方向にある場合は、

$$\delta = 2\pi(n_e - n_o)h/\lambda \quad (16)$$

であるから(15)式を用いて

$$\delta = (\pi n^3 h/\lambda) \cdot \sqrt{K_2} \quad (17)$$

とおくことができる。 $\sqrt{K_2}$ は B'_{kl} を変数とする関数であり、 B'_{kl} は B_{ij} を変数とする関数であるから上(17)式は

$$\delta = f_\delta(B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{23}, B_{13}, B_{12}) \quad (18)$$

とおくことができる。結晶に対する外的条件の変化によって、定数 B_{ij} が各々 ΔB_{11} , ΔB_{22} , ΔB_{33} , ΔB_{23} , ΔB_{13} , ΔB_{12} なる微小変化を示したとすると、位相差角 δ の微小変化分は

$$\Delta\delta = f_\delta(B_{11} + \Delta B_{11}, B_{22} + \Delta B_{22}, \dots, B_{12} + \Delta B_{12}) - \delta \quad (19)$$

となる。(18)式は(13)式においても明らかのように $K_2 > 0$ の領域においては連続であるから(19)式の第一項をテイラー展開して次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta\delta = & (\partial f_\delta / \partial B_{11}) \Delta B_{11} + (\partial f_\delta / \partial B_{22}) \Delta B_{22} + (\partial f_\delta / \partial B_{33}) \Delta B_{33} + (\partial f_\delta / \partial B_{23}) \Delta B_{23} \\ & + (\partial f_\delta / \partial B_{13}) \Delta B_{13} + (\partial f_\delta / \partial B_{12}) \Delta B_{12} \end{aligned} \quad (20)$$

関数 f_δ は B_{ij} によって2階以上微分可能であるから2次の項も存在する。詳細な検討を加えると、2次の項は一次の項に比較して 10^{-13} 以下となるので無視できる。

(20)式中の $\partial f_\delta / \partial B_{ij}$ を直接求めるには(13)式の B'_{kl} を B_{ij} に変換すればよいが、実験的な取扱いが有利なように、又、先に座標系を AT-cut 座標系に変換しておいた意味がそこなわれないように(9)式を基にして、次の演算を行うと

$$\begin{aligned} (\partial B'_{11} / \partial B_{11}) &= \cos^2 \gamma, & (\partial B'_{11} / \partial B_{22}) &= 0, & (\partial B'_{11} / \partial B_{33}) &= \sin^2 \gamma \\ (\partial B'_{22} / \partial B_{11}) &= 0, & (\partial B'_{22} / \partial B_{22}) &= 1, & (\partial B'_{22} / \partial B_{33}) &= 0 \\ (\partial B'_{33} / \partial B_{11}) &= \sin^2 \gamma, & (\partial B'_{33} / \partial B_{22}) &= 0, & (\partial B'_{33} / \partial B_{33}) &= \cos^2 \gamma \\ (\partial B'_{23} / \partial B_{11}) &= 0, & (\partial B'_{23} / \partial B_{22}) &= 0, & (\partial B'_{23} / \partial B_{33}) &= 0 \\ (\partial B'_{13} / \partial B_{11}) &= \cos \gamma \cdot \sin \gamma, & (\partial B'_{13} / \partial B_{22}) &= 0, & (\partial B'_{13} / \partial B_{33}) &= -\sin \gamma \cdot \cos \gamma \\ (\partial B'_{12} / \partial B_{11}) &= 0, & (\partial B'_{12} / \partial B_{22}) &= 0, & (\partial B'_{12} / \partial B_{33}) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

となる。更に、(20)式の各項は次のように書けるので

$$\begin{aligned} (\partial f_\delta / \partial B_{11}) &= (\partial f_\delta / \partial B'_{11})(\partial B'_{11} / \partial B_{11}) + (\partial f_\delta / \partial B'_{22})(\partial B'_{22} / \partial B_{11}) \\ & \quad + (\partial f_\delta / \partial B'_{33})(\partial B'_{33} / \partial B_{11}) + (\partial f_\delta / \partial B'_{23})(\partial B'_{23} / \partial B_{11}) \\ & \quad + (\partial f_\delta / \partial B'_{13})(\partial B'_{13} / \partial B_{11}) + (\partial f_\delta / \partial B'_{12})(\partial B'_{12} / \partial B_{11}) \\ (\partial f_\delta / \partial B_{22}) &= \dots\dots\dots \\ & \quad \vdots \end{aligned} \quad (22)$$

(21)式の値を(22)に代入して

$$\begin{aligned} (\partial f_\delta / \partial B_{11}) &= \cos^2 \gamma \cdot (\partial f_\delta / \partial B'_{11}) + \sin^2 \gamma \cdot (\partial f_\delta / \partial B'_{33}) \\ (\partial f_\delta / \partial B_{22}) &= (\partial f_\delta / \partial B'_{22}) \\ (\partial f_\delta / \partial B_{33}) &= \sin^2 \gamma \cdot (\partial f_\delta / \partial B'_{11}) + \cos^2 \gamma \cdot (\partial f_\delta / \partial B'_{33}) \\ (\partial f_\delta / \partial B_{13}) &= \frac{1}{2} \sin 2\gamma \cdot (\partial f_\delta / \partial B'_{11}) - \frac{1}{2} \sin 2\gamma \cdot (\partial f_\delta / \partial B'_{33}) \end{aligned} \quad (23)$$

を得る。次に上式中の $(\partial f_\delta / \partial B'_{kl})$ は(17)式を B'_{kl} で偏微分することによって得られ、その結果は

$$\frac{\partial f_\delta}{\partial B'_{kl}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi n^3 h}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{K_2}} \cdot \frac{\partial K_2}{\partial B'_{kl}} \quad (24)$$

となる。 $(\partial K_2 / \partial B'_{kl})$ は(13)式により

$$\begin{aligned} (\partial K_2 / \partial B'_{11}) &= 2(B'_{11} - B'_{22})(\cos^2 \Omega \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 \\ & \quad + 2(B'_{33} - B'_{22}) \sin^2 \Omega (\cos^2 \Omega \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2B'_{13}\sin 2\Omega\cos\varphi(\cos^2\Omega\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) \\
 (\partial K_2/\partial B'_{22}) & = 2(B'_{22}-B'_{11})(\cos^2\Omega\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2 \\
 & \quad + 2(B'_{22}-B'_{33})[\sin^2\Omega(\cos^2\Omega\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+\sin^4\Omega] \\
 & \quad + 2B'_{13}[\sin 2\Omega\cos\varphi(\cos^2\Omega\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\sin 2\Omega\cos\varphi] \\
 (\partial K_2/\partial B'_{33}) & = 2(B'_{11}-B'_{22})\sin^2\Omega(\cos^2\Omega\cos^2\varphi-\sin^2\varphi) \\
 & \quad + 2(B'_{33}-B'_{22})\sin^4\Omega-B'_{13}\sin 2\Omega\cos\varphi
 \end{aligned} \tag{25}$$

となり、(20)式に(23)、(24)式を代入し、更に(25)式の結果を代入すると $\Delta\delta$ の入射光線の方向に対する係数部分が求まる。

次に応力 T_j による B_{ij} の微小変化 ΔB_{ij} について考察を加える。応力による B_{ij} の微小変化分 ΔB_{ij} な次式で示される。

$$\begin{pmatrix} \Delta B_{11} \\ \Delta B_{22} \\ \Delta B_{33} \\ \Delta B_{23} \\ \Delta B_{13} \\ \Delta B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'_{11}-B_{11} \\ B'_{22}-B_{22} \\ B'_{33}-B_{33} \\ B'_{23} \\ B'_{13} \\ B'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & -\pi_{14} & 0 & 0 \\ \pi_{13} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{14} & -\pi_{14} & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 2\pi_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi_{14} & 2(\pi_{11}-\pi_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} \tag{26}$$

上式より

$$\begin{aligned}
 \Delta B_{11} & = \pi_{11}T_1 + \pi_{12}T_2 + \pi_{13}T_3 + \pi_{14}T_4 \\
 \Delta B_{22} & = \pi_{12}T_1 + \pi_{11}T_2 + \pi_{13}T_3 - \pi_{14}T_4 \\
 \Delta B_{33} & = \pi_{13}T_1 + \pi_{13}T_2 + \pi_{33}T_3 \\
 \Delta B_{23} & = \pi_{14}T_1 - \pi_{14}T_2 + \pi_{44}T_4 \\
 \Delta B_{13} & = \pi_{44}T_5 + 2\pi_{14}T_6 \\
 \Delta B_{12} & = 2\pi_{14}T_5 + 2(\pi_{11}-\pi_{12})T_6
 \end{aligned} \tag{27}$$

と示される。(27)式の T_i は水晶の結晶系にとってある座標にもとづく応力であるから、これらを AT-cut 板に固定した座標系に変換し、 T'_i で示す。応力は 2 次のテンソルであるから(6)式の方向余弦と(7)式の変換マトリックスを用いて、

$$\begin{aligned}
 T_1 & = T'_1 \\
 T_2 & = T'_2\cos^2\gamma + T'_3\sin^2\gamma + T'_4\sin 2\gamma \\
 T_3 & = T'_2\sin^2\gamma + T'_3\cos^2\gamma - T'_4\sin 2\gamma \\
 T_4 & = -(T'_2 - T'_3)\sin\gamma\cos\gamma + T'_4\cos 2\gamma \\
 T_5 & = T'_5\cos\gamma - T'_6\sin\gamma \\
 T_6 & = T'_5\sin\gamma + T'_6\cos\gamma
 \end{aligned} \tag{28}$$

のようになる。(28)式を(27)式に代入すると

$$\begin{aligned}
 \Delta B_{11} & = \pi_{11}T'_1 + \pi_{12}(T'_2\cos^2\gamma + T'_3\sin^2\gamma + T'_4\sin 2\gamma) \\
 & \quad + \pi_{13}(T'_2\sin^2\gamma + T'_3\cos^2\gamma - T'_4\sin 2\gamma) \\
 & \quad + \pi_{14}(-T'_2\sin\gamma\cos\gamma + T'_3\sin\gamma\cos\gamma + T'_4\cos 2\gamma)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi_{11} T'_1 + (\pi_{12} \cos^2 \gamma + \pi_{13} \sin^2 \gamma - \pi_{14} \sin \gamma \cos \gamma) T'_2 \\
 &\quad + (\pi_{12} \sin^2 \gamma + \pi_{13} \cos^2 \gamma + \pi_{14} \sin \gamma \cos \gamma) T'_3 \\
 &\quad + (\pi_{12} \sin 2\gamma - \pi_{13} \sin 2\gamma + \pi_{14} \cos 2\gamma) T'_4 \\
 \Delta B_{22} &= \pi_{12} T'_1 + \pi_{13} (T'_2 \sin^2 \gamma + T'_3 \cos^2 \gamma - T'_4 \sin 2\gamma) \\
 &\quad + \pi_{11} (T'_2 \cos^2 \gamma + T'_3 \sin 2\gamma + T'_4 \sin 2\gamma) \\
 &\quad - \pi_{14} (-T'_2 \sin \gamma \cos \gamma + T'_3 \sin \gamma \cos \gamma + T'_4 \cos 2\gamma) \\
 &= \pi_{12} T'_1 + (\pi_{11} \cos^2 \gamma + \pi_{13} \sin^2 \gamma + \pi_{14} \sin \gamma \cos \gamma) T'_2 \\
 &\quad + (\pi_{11} \sin^2 \gamma + \pi_{13} \cos^2 \gamma - \pi_{14} \sin \gamma \cos \gamma) T'_3 \\
 &\quad + (\pi_{11} \sin 2\gamma - \pi_{13} \sin 2\gamma - \pi_{14} \cos 2\gamma) T'_4 \\
 \Delta B_{33} &= \pi_{13} T'_1 + \pi_{13} (T'_2 \cos^2 \gamma + T'_3 \sin^2 \gamma + T'_4 \sin 2\gamma) \\
 &\quad + \pi_{33} (T'_2 \sin^2 \gamma + T'_3 \cos^2 \gamma - T'_4 \sin 2\gamma) \\
 &= \pi_{13} T'_1 + (\pi_{13} \cos^2 \gamma + \pi_{33} \sin^2 \gamma) T'_2 \\
 &\quad + (\pi_{13} \sin^2 \gamma + \pi_{33} \cos^2 \gamma) T'_3 \\
 &\quad + (\pi_{13} \sin 2\gamma - \pi_{33} \sin 2\gamma) T'_4 \\
 \Delta B_{23} &= \pi_{14} T'_1 - \pi_{14} (T'_2 \cos^2 \gamma + T'_3 \sin^2 \gamma + T'_4 \sin 2\gamma) \\
 &\quad + \pi_{44} (-T'_2 \sin \gamma \cos \gamma + T'_3 \sin \gamma \cos \gamma + T'_4 \cos 2\gamma) \\
 &= \pi_{14} T'_1 - (\pi_{14} \cos^2 \gamma + \pi_{44} \sin \gamma \cos \gamma) T'_2 \\
 &\quad - (\pi_{14} \sin^2 \gamma - \pi_{44} \sin \gamma \cos \gamma) T'_3 \\
 &\quad - (\pi_{14} \sin 2\gamma - \pi_{44} \cos 2\gamma) T'_4 \\
 \Delta B_{13} &= \pi_{44} (T'_5 \cos \gamma - T'_6 \sin \gamma) + 2\pi_{14} (T'_5 \sin \gamma + T'_6 \cos \gamma) \\
 &= (\pi_{44} \cos \gamma + 2\pi_{14} \sin \gamma) T'_5 \\
 &\quad - (\pi_{44} \sin \gamma + 2\pi_{14} \cos \gamma) T'_6 \\
 \Delta B_{12} &= 2\pi_{14} (T'_5 \cos \gamma - T'_6 \sin \gamma) + 2(\pi_{11} - \pi_{12}) (T'_5 \sin \gamma + T'_6 \cos \gamma) \\
 &= \{2\pi_{14} \cos \gamma + 2(\pi_{11} - \pi_{12}) \sin \gamma\} T'_5 \\
 &\quad - \{2\pi_{14} \sin \gamma - 2(\pi_{11} - \pi_{12}) \cos \gamma\} T'_6
 \end{aligned} \tag{29}$$

となる。 (29) 式の値を (20) 式に代入し、更に (23), (24), (25) 式の結果を (20) 式に代入すると $T'_1, T'_2 \cdots T'_5, T'_6$ の係数がもと示り、 (20) 式は

$$\begin{aligned}
 \Delta \delta &= C'_1(\Omega, \varphi) T'_1 + C'_2(\Omega, \varphi) T'_2 + C'_3(\Omega, \varphi) T'_3 + C'_4(\Omega, \varphi) T'_4 \\
 &\quad + C'_5(\Omega, \varphi) T'_5 + C'_6(\Omega, \varphi) T'_6
 \end{aligned} \tag{30}$$

となり、但し $C'_i(\Omega, \varphi)$ は上で考察しは応力一学係数である。

4. 応力一光学係数の計算

4.1 AT-cut 板の y' 面に平行に光線を入射させた場合

AT-cut 板は Fig. 2 にも示すように x 軸のまわりに $\gamma = 35^\circ 15'$ だけ回転したものであるから (29) 式の γ は $35^\circ 15'$ にとる。 y' 面に平行に光線を入射させる場合、 Fig. 4 に示すように (30) 式で $\varphi = 0$ にとり、 $\Omega = 0^\circ \sim 360^\circ$ の範囲で変化させれば、全ての条件について検討したことになる。

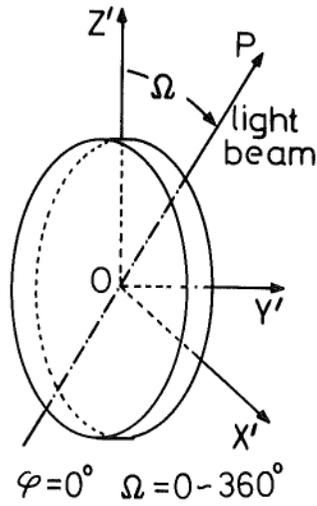


Fig. 4 Incident light beam when parallel to the Y' -surface, and Ω : beam angle from the Z' -axis.

この条件の基で $C'_i(\Omega, 0)$ を computer を用いて計算したのが **Fig. 5 ~ 10** である.

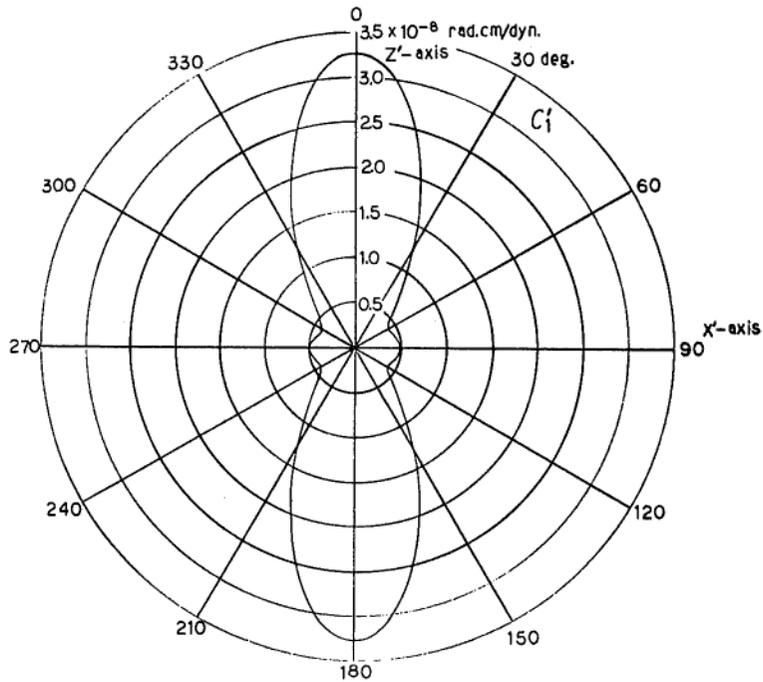


Fig. 5 The calculated stress-optical coefficient for stress T'_1 of the flexural motion.

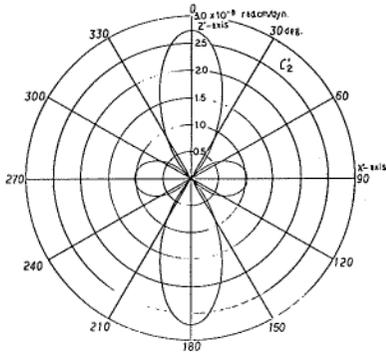


Fig. 6 Stress-optical coefficient for stress T'_2 .

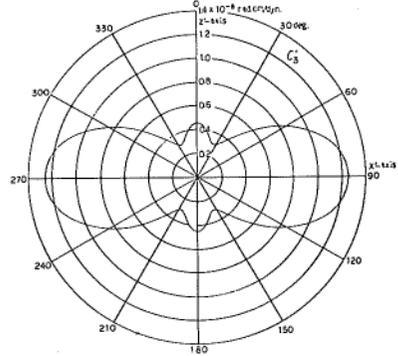


Fig. 7 Stress-optical coefficient for stress T'_3 .

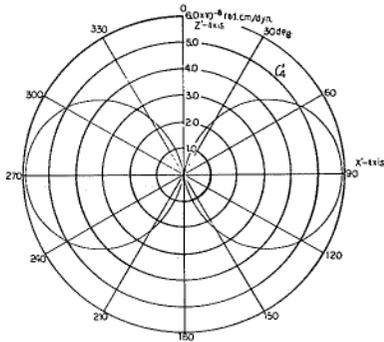


Fig. 8 Stress-optical coefficient for stress T'_4 .

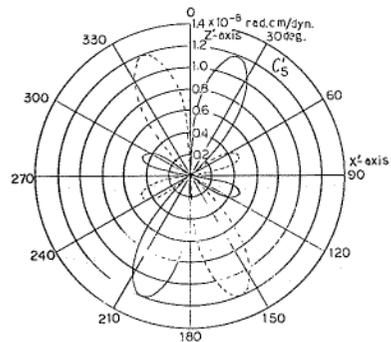


Fig. 9 Stress-optical coefficient for stress T'_5 .

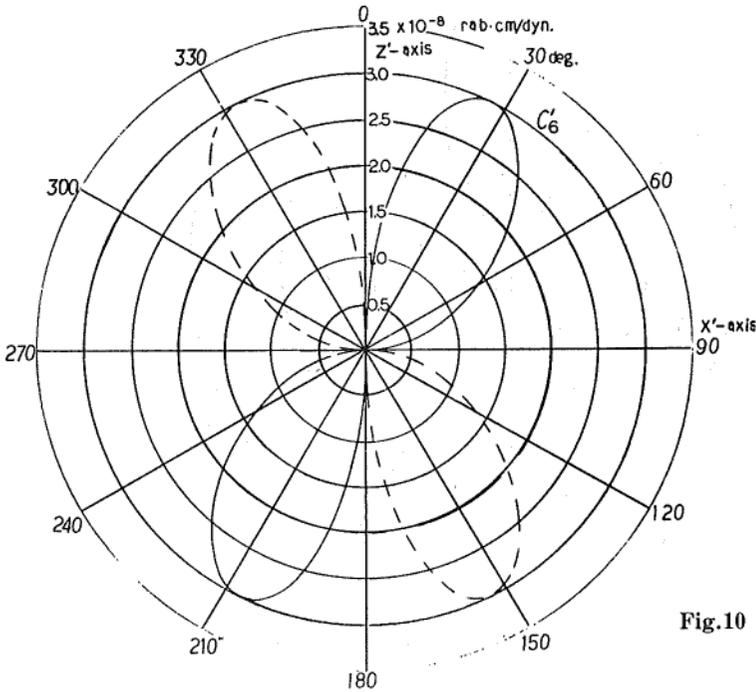


Fig.10 The calculated stress-optical coefficient for stress T'_6 of the thickness shear motion.

4.2 AT-cut 板の z' 面に平行に光線を入射させた場合

この場合は Fig.11 にも示されているように(30)式において $\Omega=90^\circ$ にとり $\varphi=0\sim 360^\circ$ の範囲で変化させればよく、この条件の基で $C_i''(90, \varphi)$ を computer を用いて計算したものが Fig.12~Fig.14 である。

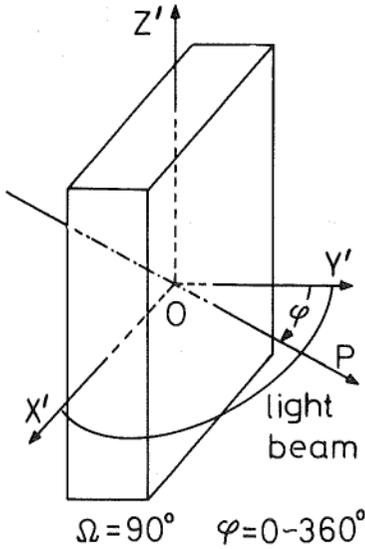


Fig.11 Incident light beam when parallel to the Z' -surface, and φ : beam angle from Y' -axis.

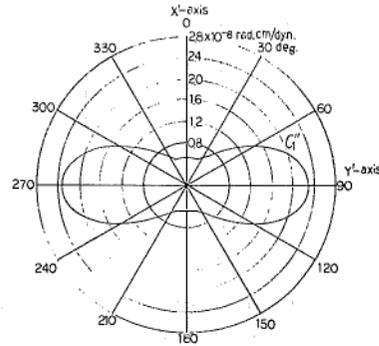


Fig.12 Stress-optical coefficient for stress T_1' .

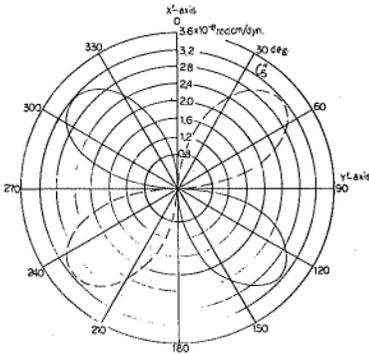


Fig.13 Stress-optical coefficient for stress T_2' .

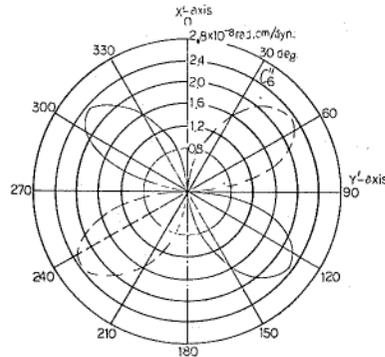


Fig.14 Stress-optical coefficient for stress T_3' .

4.3 AT-cut 板の x' 面に平行に光線を入射させた場合

この場合は Fig.15 にも示されているように(30)式において $\varphi=90^\circ$ にとり $\Omega=0\sim 360^\circ$ の範囲で変化させることになる。この条件の基で $C_i'''(\Omega, 90)$ を computer を用いて計算した結果が Fig.16~17 である。

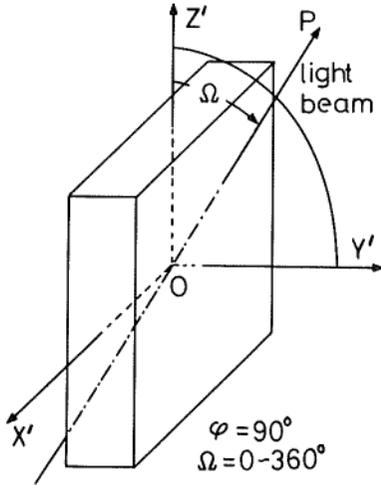


Fig.15 Incident light beam when parallel to the X' -surface, and Ω : beam angle from the Z' -axis.

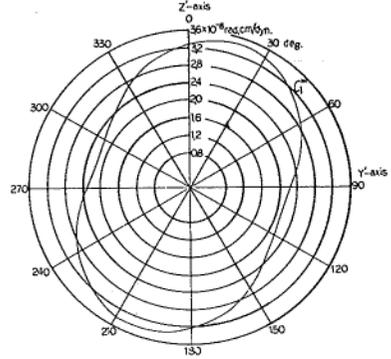


Fig.16 Stress-optical coefficient for stress T'_1 .

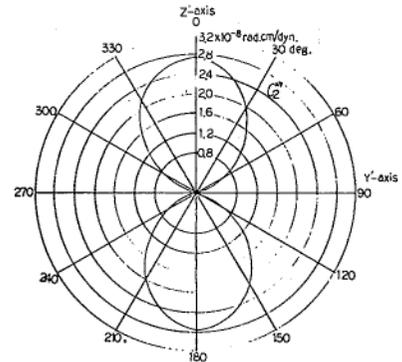
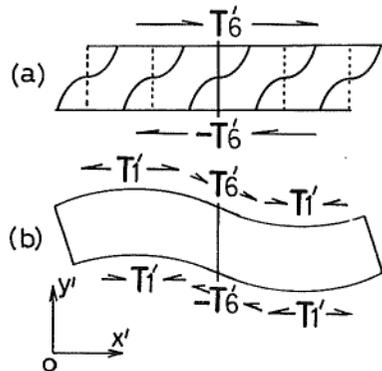


Fig.17 Stress-optical coefficient for stress T'_2 .

5. 計算結果の実験的検証

計算した応力-光学係数が正しいかどうかを実験によって確かめる。一般に境界をもつ AT-cut 水晶振動子を厚味すべり共振モードで励振すると、無限平板の場合と異り屈曲モードが寄生する⁷⁾。この様子を Fig.18 に示す。従って z' 軸に平行にプローブ光線を透過させた場合、Fig. 5. Fig.16 の係数の関係から応力 T'_1 が求まるであろう。この場合、Fig.10 からなように C'_6 係数はゼロであるから T'_6 は検出されず T'_1 のみか求まる。 T'_1 は屈曲によって生ずる応力であるから、基本振動・倍振動においても板表面のすべり変位のみが屈曲に有効な成分となり、板全体が Fig.18 に示すような屈曲振動を行う。従って、 y' 方向（厚味方向）及び x' 方向（変位方向）にプローブ光線を走査した応力分布を測定すれば、 y' 方向では板表面付近に位相が π だけ異なる（互に逆方向



a: infinite crystal plate
b: bounded crystal plate

Fig.18 Oscillating modes of the AT-cut quartz crystal plates.

に振動する) 応力のピーク値が存在するであろう. 又, x' 方向にプローブ光線を走査すれば屈曲の中位層以外の固所では, Fig.18 の屈曲点にあたる場所に位相が π だけ異なるピーク値が得られるであろう. 測定の結果を Fig.19, Fig.20 に示す. Fig.19 は $x'/x'_0=0.25$ の位置を y' 方向にプローブ光線を走査した結果であり, Fig.20 は $y'/y'_0=0.25$ の位置を x' 方向に走査して得られた結果である⁵⁾. 両図ともあらかじめ推測した応力 T'_1 の分布と一致し, Fig. 5, Fig.16 の応力-光学係数の計算結果は正しいものと思われる.

次に厚味すべり振動に伴う応力 T'_6 検出には Fig.10 の応力-光学係数の関係を用いて, プローブ光線を y' 面に平行で z' 軸から 27° 傾けて水晶中を透過させればよい. この時, Fig. 5 の T'_1 の応力-光学係数 C'_1 はほぼゼロになり, 従って T'_1 は検出されない.

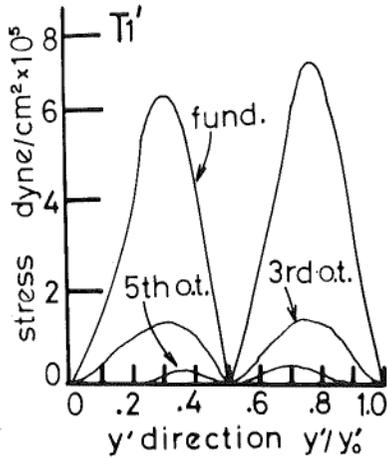


Fig.19 Stress distributions of T'_1 in the Y' -direction, generated by a flexural motion.

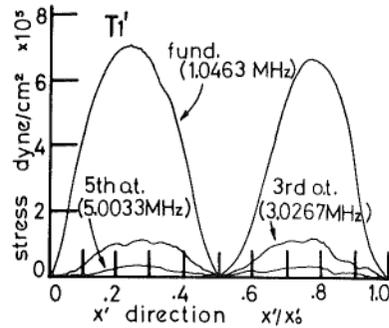


Fig.20 Stress distributions of T'_1 in the X' -direction, generated by a flexural motion.

Fig.21, Fig.22 にプローブ光線を y' 方向, x' 方向に走査した場合の応力 T'_6 の分布を示す. Fig.21 は $x'/x'_0=0.5$ の所を y' 方向に走査し, Fig.22 は $y'/y'_0=0.5$ の所を x' 方向に走査して得ら

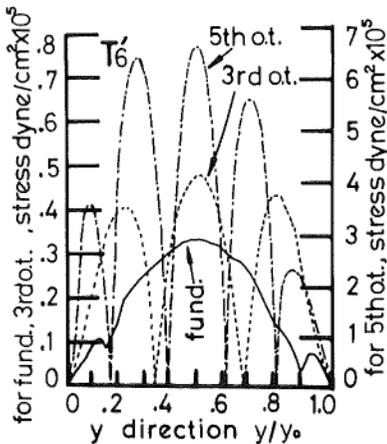


Fig.21 Stress distributions of the thickness shear T'_6 in the Y' -direction.

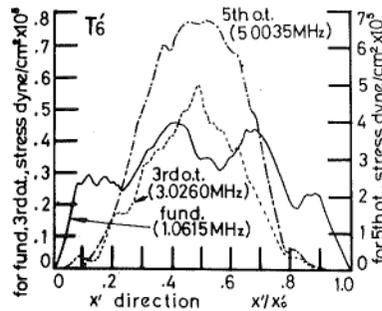


Fig.22 Stress distributions of the thickness shear T'_6 in the X' -direction.

れた結果である^{5,8)}。予想通り T'_1 から T'_6 を分離して測定することができ Fig.10 の応力-光学係数 C'_6 の計算結果は正しいもほとと思われる。Fig.19とFig.22の比較で興味味のある点は厚味方向の応力 T'_1 と T'_6 の分布において、前者はいかなる倍振動においてもピーク値を2ヶ持つ、板全体にかかわる振動であるのに対して、後者は倍振動において、各層毎に互に逆方向に振動している応力分布を示す。Fig.23は5次倍振動(5th o. t.)の各振動応力層を x' 方向に分布を測定したものである。Fig.21との関連は5次倍振動(破線で示されている)の各ピーク値を左から順に1,2,~5として示してある。

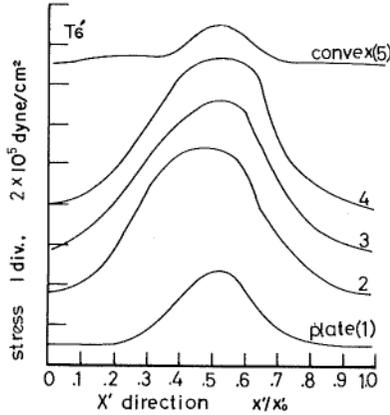


Fig.23 Stress distributions of the thickness shear T'_6 in the X' -direction, when plate is oscillating in 5 th overtone frequency.

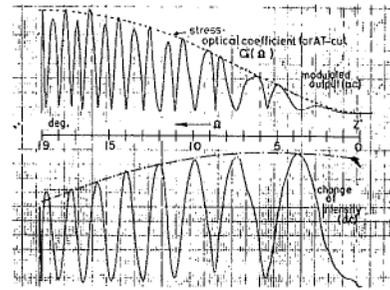


Fig.24 Direct measurement of stress-optical coefficient $C'_6(\Omega)$.

更に C'_6 を回転角 Ω の直接的関数として、実験によって求めた結果を Fig.24 に示す^{4,5)}。実験の方法は $y'/y'_0=0.5$, $x'/x'_0=0.5$ の所を z' 軸と一致させてプローブ光線を透過させておく、従って先記の実験事実により厚味すべり振動の応力 T'_6 によって光変調をかけることになる。次にこの水晶振動子を $X'-Z'$ 平面に平行に回転させる。その時 Fig.24 の上図のような交流分の変調出力が得られる。この包絡線(点線)が回転角 Ω に対する、応力-光学係数 $C'_6(\Omega)$ を示す。変調出力信号が波打つ現象議論については著者の別の論文を参考にされたい⁵⁾。

実験の結果は相対的に Fig.10 と同一の形状を示し、 C'_6 の算値は正しいことを示す。これらのことから、前述の C'_i の誘導の理論は正しく、扱われていたことが明確になった。

6. 測定された応力の信頼性

測定した応力の絶対値と Spencer が X 線回折顕微法⁹⁾で測定したひずみとの比較によって計算によって求めた応力-光学数の信頼性を論ずる。Spencer の実験によれば plano-convex AT-cut 振動子(基本厚みすべり共振周波数約 $1MH_z$, 著者もほぼ同様な資料を用いている)を5次倍振動で励振した場合、結晶電流 $1\mu A$ 当りのひずみは $S'_6=1.37 \times 10^{-8}(\mu A^{-1})$ であったと報告している。著者の実験では結晶電流が $150\mu A$ であったので、

$$\left. \begin{aligned} I_p &= 150\mu A \\ S'_6 &= 1.37 \times 10^{-8} \times 150 = 2.06 \times 10^{-6} \\ T'_6 &= C'_{66} S'_6 = 6.06 \times 10^5 \text{ dyn/cm}^2 \\ &\text{where } C'_{66} = 2.93 \times 10^{11} \text{ dyn/cm}^2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

となる。但し上式中で C'_{66} は AT-cut 板の弾性係数である。

今、Fig.10 から z' 軸から回転角 $\Omega = 30^\circ$ 方向の応力-光学係数 $C'_6(\Omega = 30) = 3.0 \times 10^{-8} \text{ rad}\cdot\text{cm}/\text{dyn}$ を用いて応力の絶対値を当てみると Fig.21, Fig.22 に示したように第 5 次倍振動 (5th o.t.) の応力の最大値は $T'_6 = 6.5 \times 10^5 \text{ dyn/cm}^2$ となり、Spencer の報告(31)式とより一致を示す。

7. 結 論

AT-cut 水晶振動子の応力-光学係数を理論的に誘導し AT-cut plano-convex 水晶振動子資料を用いて、計算結果を実験的に裏付けた。特にこの研究にける特徴はこれまで多くの研究者によって、議論されて来た。AT-cut 振動子が厚味すべり振動を行う場合に寄生する屈曲振動に関する応力が、プローブ光線の方向を選択することによって、剪断応力 T'_6 から分離して測定することが可能であると言う結論に刻った点である^{5,10)}。又、応力-光学係数を導入することによって、各々の応力の絶対値が実験的に求められると言う点は今後の水晶振動子の開発・研究において、有効な手法となる。AT-cut 水晶振動子を厚味すべり共振周波数で用いているかぎり、あまり重要とはならない他の応力 T'_2, T'_3, T'_4, T'_5 等に対する応力-光学係数も掲載しておいた。今回は AT-cut 専用の理論展開を試みたが、他種の cut にも応用できる。汎用な応力-光学係数の誘導を次回には報告したい。頁数の関係上、附録 2 は次回に記載する。

謝 辞

実験は北大工学部電気工学科・回路講座で行い、同講座の深井一郎教授並びにスタッフ一同には種の協力を得た。元北大同講座の安田一次教授には研究全体を通じて御指導を得た。理論の展開には元同講座修士課程・杉原正博君（現・中部電力）と有意義なデスカッションを行った。実験には同講座修士課程・山本和光君（現・住友電工）の協力を得た。

計算及び係数の作図には北大・大型計算センターの電算機を用いた。水晶資料の提供は東洋通信機・岡野庄太郎氏の御好意による。関係諸氏に感謝する。

参 考 文 献

- 1) 山形積治：“光弾性効果による光線の変調とその応用研究，第 1 報” 北教大紀要第 2 部 A, Vol.27(1977), No. 2, p.5.
- 2) 山形積治：“同上，第 2 報” 北教大紀要第 2 部 A, Vol. 28(1976) No. 1, p.29.
- 3) 山形積治他：“Mechanical 励振による水晶振動子の諸特性” 信学会超音波研究会, US77-7(1977), P.1.
- 4) 山形積治他：“AT-cut 水晶振動子による光変調機構の研究” 北教大紀要第 2 部 A, Vol.26(1975) No. 1, p.47.

- 5) 山形積治他: "レーザ光線の変調による AT-cut 水晶振動子の応力分布測定" 信学会誌, Vol. 60-A(1977) No.12, p.1122.
- 6) M. Born and E. Wolf: "Principles of Optics" Pergamon pre., Oxford (1970).
- 7) R.D. Mindlin: "Thickness-shear and flexural vibration of crystal plates" J. appl. Phys., Vol. 22(1951) No. 3, p.316
- 8) I. Yasuda and S. Yamagata: "Stress distribution measurement in oscillating quartz crystal with a laser probe" OSA/IEEE, Digest of Technical Papers, P. 38(May 1967).
- 9) W.J. Spencer: "Physical acoustics" Vol. 5 A, Academic Pre., New York, p. 127(1968).
- 10) S. Yamagata et. al: "A Measurement of the Stress Distributions of an AT-cut Quartz Crystal Resonator by Means of Laser Drobe Beam Modulation" . Trans. IECE Jap. Vol. E60,(1977), No.12, p.728.