実数値函数の連続性と可微分性について

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2012-11-07 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 藤戸, 伊佐美 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.32150/00002605

北海道教育大学紀要（第2部A）第30巻 第1号
Journal of Hokkaido University of Education (Section II A) Vol. 30, No. 1

September, 1979
昭和54年9月

実数値函数の連続性と可微分性について

藤　戸　伊佐美
北海道教育大学函館分校数学教室

On the Continuity and the Differentiability of the Function

Isami FUJITO
Mathematics Laboratory, Hakodate College, Hokkaido University of Education,
Hakodate 040

Abstract

We have been studying how to make a connected function of a continuous function and a differentiable function. In the first part of this paper, we tried to investigate the monotonic property of the difference function between the continuous part and the differentiable part of a connected function. In the last part of this paper, we showed that a continuous function of a bounded variation had the connected function which was made of a continuously differentiable function and a continuous function in some subinterval.

1　序

実数の有界な区間をIとする。eは可附番無限集合で，Iで稠密とする。eで一様連続な函数fと，$\mathrm{I}-e$で可微分な函数gの組に対して，eを与えれば，一意に定まるI上の函数について，第2節で述べる。

第3節では，測度零の集合を，可附番稠密集合と，そうでない集合に分け，有界変動連続函数の場合について，第2節で取り扱った函数との関聯を述べる。

2　連続性と可微分性

実数の有界閉区間を，$\mathrm{I}=[a,\ b]$とする($a<b$)。Iの部分集合eは,可附番集合で,Iで稠密とする。f，gは，eで連続で，$\mathrm{I}-e$で可微分な函数とする。$\mathrm{I}-e$で，$f'(x)=g'(x)$で，$f(a)=g(a)$ とすると，Bourbakiの有限増分の定理を用いて，$a\leqq x\leqq b$なる任意のxに対して，$f(x)-f(a)\geqq g(x)-g(a)$，かつ$f(x)-f(a)\leqq g(x)-g(a)$となり，$f(x)=g(x)$となる。

一方，f，gがIで連続であるから，eで$f=g$ならば，Iで$f=g$となる。

改めて，Iで連続な函数fと，$\mathrm{I}-e$で可微分なI上の連続函数gをとる。e上でfと一致し,$\mathrm{I}-e$上で導函数g'を持つI上の函数を考える。この函数を$(f)g$と記す。$(f)g$を求める方法については,既に発

表をしたが，こゝでは，少し異なった観点からの説明と，この函数の性質について述べる。$\triangle n$はe上に分点を持つ分割である。即わち，$a=x_0<x_1<\cdots\cdots<x_n=b$で，$x_i(i=1,2,\cdots\cdots,n-1)$は$e$の元である。

$$|\triangle_n|=\sup_{1\leqq i\leqq n}|x_i-x_{i-1}|$$

として，$n\to\infty$のとき$|\triangle_n|\to 0$とする。fはeで連続で，$\mathrm{I}-e$で可微分とする。Weierstrassの定理を用いて，l_nを$[x_{i-1},\ x_i]$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$で一次函数とし，Iで連続とすると，$l_n\to f$ $(n\to\infty)$となるように，l_nをとることが出来る。$\mathrm{I}-e$でfが可微分より，$\mathrm{I}-e$で$l'_n\to f'$ $(n\to\infty)$となる。これは，$h,k>0$とすると，$\mathrm{I}-e$の点xに対して，

$$\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k}=\frac{h}{h+k}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)+\frac{k}{h+k}\left(\frac{f(x-k)-f(x)}{-k}\right)$$

より，$h,\ k\to 0$のとき，$f'(x)$に収束するからである。

改めて，l_nを$]x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$の夫々で一次函数とし，fはI上の連続函数で，$l_n(x_i)=f(x_i)$とする。L_nを，$\triangle_n$の分点を除き$\mathrm{L}'_n=l'_n$とし，Iで連続とする。更に，gを$\mathrm{I}-e$で可微分なI上の連続函数とし，$\mathrm{L}_n\to g(n\to\infty)$とする。但し，任意の$n$に対して，$l_n(a)=\mathrm{L}_n(a)$とする。このとき，$(l_n,\ \mathrm{L}_n)$で函数の組$(f,\ g)$が一意に定まる。$l_n$の極限として定まる$\mathrm{I}$上の函数が$(f)_g$となる。

eの元のxについては，一般に$\mathrm{L}'_{n+}(x)\neq l'_{n+}(x)$で，$l'_{n+}(x)$は$+\infty$，又は$-\infty$となる。$e$の元$x$に対して，$(f)'_{g\pm}(x)$の値は，$l'_{n\pm}(x)$の$n\to\infty$としたときの極限値とする。従って，$e$の元$x$に対して，$(f)'_{g\pm}(x)$は，$+\infty$，$-\infty$，$g'_+(x)$，$g'_-(x)$のいずれかの値をとる。

特に，l_nが$\mathrm{I}-e$の任意の元xと，任意の$\varepsilon>0$に対して，適当な自然数Nがとれて，$\mathrm{N}\leqq n<m$のとき，l_nに対する分割$\triangle_n$で，xを含む分割$\triangle_n$の一つの開区間を$\triangle_n(x)$と記すと，$\triangle_n(x)$の任意の元yについて，$|l'_n(x)-l'_m(y)|<\varepsilon$が成立すれば，$g'$は$\mathrm{I}-e$で連続となる。
$(f)_g$の積分は，

$\displaystyle\int_a^x(f)_g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^x l_n(x)dx$と定める。従って，

$\displaystyle\int_a^x(f)_g(x)dx=\int_a^x f(x)dx$となる。

eの任意の元xに対して，$g'_+(x)$ $(x\neq b)$が存在して，$(f)'_{g+}(x)\geqq g'_+(x)$ならば，$(f)_g-g$は単調増加函数となり，$e$の元$x$，$y$に対して，$y>x$のとき，$f(y)-g(y)\geqq f(x)-g(x)$となる。$f-g$は$\mathrm{I}$で連続函数だから，$\mathrm{I}$で$f-g$は単調増加函数となる。又，$e$の任意の元$x$に対して，$(f)'_{g+}(x)=g'_+(x)$ならば，$f=g$となる。

特に，gがIで連続可微分函数のとき，$f\neq g$ならば，eの元xに対して，$(f)'_{g+}(x)\neq g'(x)$，又は$(f)'_{g-}(x)\neq g'(x)$となる。$(f)'_{g+}(x)\neq g'(x)$のとき，$(f)'_{g+}(x)>g'(x)$となるeの部分集合をe_1，$(f)'_{g+}(x)<g'(x)$となるeの部分集合をe_2とする。e_1，e_2のいずれかが非稠密の時，適当な部分区間をとれば，一方の場合か，又は連続可微分函数と一致するので，$f-g$は単調函数となる。e_1，e_2のいずれもが稠密であるときは，除外集合をe_1,e_2として考えれば，夫々の場合に$f-g$は単調函数となることより，$f=g$となり，この場合は起り得ない。

3　有界変動連続函数の可微分性

eは有界閉区間$\mathbf{I}$の部分集合とし，$m(e)$はeの測度を示す。eが非可算集合で，$m(e)=0$のときeは非稠密集合となる。何故なら，eを稠密集合と仮定してみる。$\mathbf{I}$の分割列$\triangle_n$をとり，$\triangle_{n+1}$は$\triangle_n$の細分割列となるようにし，更に$|\triangle_n|\to 0\ (n\to\infty)$とする。$\triangle_n$により定まる$n$個の開区間を$\triangle_n^{(j)}$ $(j=1,2,\cdots\cdots\cdots,\ n)$と記す。仮定より，$\triangle_n^{(j)}\cap e\neq\phi$となる。$\triangle_n^{(j)}\supset\mathbf{F}_n^{(j)}$となる閉区間$\mathbf{F}_n^{(j)}$をとる。$e$が非可算集合であることより，$\mathbf{F}_n^{(j)}$は一点からなる閉区間とはならない。$e$は$\bigcap_n(\bigcup_j\mathbf{F}_n^{(j)})$を含む。$m(e)=0$より$\sum_j|\mathbf{F}_n^{(j)}|\to 0\ (n\to\infty)$となる。一方，任意の$n$に対して，$\sum_j|\triangle_n^{(j)}|=|\mathbf{I}|$となることより，適当な$\triangle_n^{(j)}$があって，$\triangle_n^{(j)}\cap e=\phi$となり，$e$を稠密集合としたことに反する。

次に，eは可算集合で，$\mathbf{I}$で稠密とする。f'を$\mathbf{I}-e$で可積分とすると，eの任意の元xにに対して$f'(x+0)=f'(x-0)$となる。即わち，f'は$\mathbf{I}$で連続となるように拡張出来る。それは，$\triangle_n$をe上に分点を持つ分割列とし，$|\triangle_n|\to 0\ (n\to\infty)$とする。$f'$が可積分より，$\triangle_n$の各区間で定数値をとる階段函数$\varphi_n$を適当にとれば，$\varphi_n\to f'$ ($n\to\infty$，測度的)となる。何故なら，上記の性質をもつどんな階段函数に対しても上記のことが成立しないならば，f'は，$\triangle_n$の分点のnについての和集合をe_1とすると，$\mathbf{I}-e_1$で可積分でない。従って，f'は$\mathbf{I}-e$で可積分でないことになり，仮定に反する。そこで，2種類の分割列$\triangle_n$，$\triangle_n'$をとる。$|\triangle_n|\to 0\ (n\to\infty)$，$|\triangle_n'|\to 0\ (n\to\infty)$とし，$\triangle_n$，$\triangle_n'$はいづれも$e$上に分点を持つ。$\triangle_n$，$\triangle_n'$の分点の$n$についての和集合を夫々$e_1$，$e_2$とし，$e_1\cap e_2=\phi$とする。このとき，$\varphi_n^{(1)}\to f'$ ($n\to\infty$，測度的)，$\varphi_n^{(2)}\to f'$ ($n\to\infty$，測度的)となるような，$\triangle_n$,$\triangle_n'$の各区間で定数値をとる階段函数$\varphi_n^{(1)}$，$\varphi_n^{(2)}$が仮定よりとれる。従って，e_1に属する任意の元xに対しては，$\varphi_n^{(2)}(x)\to f'(x)\ (n\to\infty)$となり，$e_2$に属する任意の元$x$に対しては，$\varphi_n^{(1)}(x)\to f'(x)\ (n\to\infty)$となる。こゝで$f'(x)$は，他の階段函数の極限値を示すのに，便宜的に使用した。とにかく，$e_1\cup e_2$の元xに対しては，$f'(x+0)=f'(x-0)$となることが示された。eの任意の元xを分点として持つ分割列とxを分点として持たない分割列が作れることより，上記命題が成立する。

fが有界変動連続函数のときは，測度零の集合を除き，f'が存在し，可積分であるので，上のことと，第2節より適当な区間列の中で，$(f)_{\int f'(x)dx}$と表わされ，$f'(x)$はその区間列の区間の中で連続に拡張することが出来る。云いかえると，fが有界変動連続函数ならば，適当な区間の中で$\int f'(x)dx$は連続可微分となる。又，第2節の結果より，各区間で，$f-\int f'(x)dx$は単調函数となる。従って，その区間では，fは単調函数である。尚，fが絶対連続函数のときは，$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(x)dx$となり，適当な区間で$f'$が連続に拡張出来ることより，その区間で$f$は連続可微分函数となる。