北海道教育大学学術リポジトリ
Hokkaido University of Education Repository
国立大学法人 北海道教育大学 HOKKAIDO UNIVERSITY OF EDUCATION

光弾性効果による光変調とその応用研究　第6報：理論解析と有限要素法の結合によるAT-Cut水晶振動子の新解析方法

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2012-11-07 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 山形, 積治 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.32150/00002682

北海道教育大学紀要（第２部Ａ）第30巻 第２号
Journal of Hokkaido University of Education (Section II A) Vol. 30, No. 2

昭和55年３月
March, 1980

光弾性効果による光変調とその応用研究

第６報　理論解析と有限要素法の結合によるAF－Cut水晶振動子の新解析方法

山　形　積　治
北海道教育大学旭川分校物理学教室

Study on the Applications of the Light Modulation by the Dynamic Photo-Elastic Effect

Report No. 6 New Method to Analyes Vibration Modes 9f AT－Cut Quartz Crystal Resonator by the Combination of Theoretical Equation and Finite Element Method

Sekiji YAMAGATA
Physics Laboratory, Asahikawa College, Hokkaido University of Education,
Asahikawa 070

Abstract

The present paper presents a numerical analysis of a plano-convex AT-cut quartz crystal resonator oscillating with its fundamental, 3rd overtone, and 5th overtone thickness-shear resonant vibration frequencies. The unmerical resonant frequencies and the vibration mode forms calculated numerically by using a Schrödinger's equation with a finite element method show good agreement with those obtained experimentally.

§ 1. 緒　　言

水晶振動子等の振動体の振動モードを数値的に解析する場合，いかなる手法を用いるにせよ，固有値問題に帰着する．現状の大型計算機のサブルーチンとして手軽に利用できる固有値マトリックスはせいぜい 10^2 元程度であり，特殊なプログラムを工夫しても，高々（２～３）$\times 10^3$ 元程度のプログラムが限度である．AT－cut水晶振動子の厚味辷リモードを立体的（３次元）に解析する場合は少くとも 10^4 のオーダーの元が必要となる．理論上計算機のメモリーを無制限に利用でき，大型計算機を長時間に渡って，独占使用することが可能であれば，３次元の解析も可能となるが，現実の問題として不可能である．

第5報で報告した有限要素法による解析の結果をみても元の数を制限内に納めるために，節点の取り方に相当の制約が加えられ，plano-convex AT−cut 水晶振動子の厚味辷りモードの解析は行えたが[10,26,27]，屈曲モード等の他の振動成分が含まれているような振動[1,3]の解析に対しては誤差が大きくなる．

一方，発想を改めて，理論的な解析が可能な限り，解析的な取扱いを行い，最終の段階で有限要素法による数値的な手法によって固有値（共振周波数を与える），固有関数（振動のモードを与える）を計算すれば元の節約になるであろう，このことは汎用サブルーチンの固有マトリックスの制限範囲内で計算処理を行っても，直接的に有限要素法で解いた場合よりも，精度が高くなる．

本研究では振動体の資料として，AT−cut 水晶振動子を用いて解析を加えた，即ち，plano-convex AT−cut 水晶振動子を無限障壁ポテンシヤル井戸を有する振動体とみなせば振動に対する微分方程式は Schrödinger の方程式となる[6,11,21]．

Wilson はこの式を放物面ポテンシヤル井戸を有する振動体として近似的な解析解を得たが，大胆な近似であるために解の精度はあまり高くない[5]．他方，得られた Schrödinger の方程式を近似的な処理を行うことなく，物理的意味を考慮しつつ，有限要素法を用いて解く手法が本解析方法である．この方法によって(1)水晶振動子の共振周波数，(2)厚味辷り振動の変位分布，(3)厚味辷り振動に伴う剪断応力の分布，(4)蒸着電極が振動子に与える影響等について計算を行い，実験値との比較・検討を加えた．

その結果，高い精度で解析することができた．

§ 2．弾強体中での波動

弾性体内部に波動が生じ各点が直角座標（x_1, x_2, x_3）or（x, y, z）の各軸方向に（U_1, U_2, U_3）なる変位を示したものと仮定すると，変位は場所（座標）の関数として示される．ここで取扱う範囲は Hooke の法則が成立する線形な場合に限る，弾性体内部に変形が生ずれば，変形に対応する内部応力が生ずる．弾性体内部に Fig. 1 で示すような微小6面体をとれば，その各側面に垂直な応力（T_1, T_2, T_3）と平行に働く応力（T_4, T_5, T_6）とが生ずる．

弾性体が振動をともなっている場合，変位（U_1, U_2, U_3）は場所の関数であると共に時間の関数との関係ともなるので，各座標軸（x_1, x_2, x_3）方向の加速度は

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \tag{1}$$

と示され，Fig. 1 の微小6面体に対して，力はつり合いの状態にあるので運動方程式をたてれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{13}}{\partial x_3}&=\rho\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}\\
\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{23}}{\partial x_3}&=\rho\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}\\
\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}&=\rho\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2}$$

となる．ただし ρ は密度である．Einstein の表記法を用いると

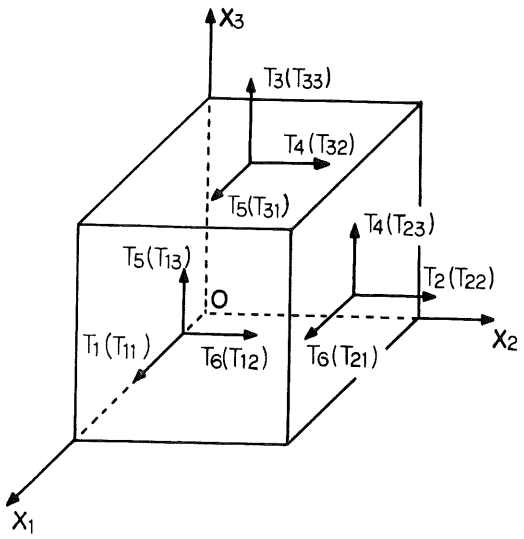

Fig. 1 Notation of nornal stresses and shear stresses referred to rectangular coordinate system.

$$\rho \ddot{U}_i=\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \qquad i,k=1,2,3 \tag{3}$$

と示される．振動の変位が小さい場合，即ち，線形な変形の場合，ひずみテンソルは

$$S_{ih}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) \qquad i,k=1,2,3 \tag{4}$$

となり，一方，応力テンソル T_{in} とひずみテンソル S_{ik} は 4 次の弾性定数をテンソル（stiffness constant）c_{imik} で結合され

$$T_{lm}=c_{lmik}\ S_{ik} \tag{5}$$

となる．上式の添字に対して短縮記号の約束を適用すれば 11→ 1，22→ 2，33→ 3，23 or 32→ 4，13 or 31→ 5，12 or 21→ 6 となるから

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial U_1/\partial x_1 \\ \partial U_2/\partial x_2 \\ \partial U_3/\partial x_3 \\ \partial U_3/\partial x_2+\partial U_2/\partial x_3 \\ \partial U_1/\partial x_3+\partial U_3/\partial x_1 \\ \partial U_2/\partial x_1+\partial U_1/\partial x_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

となり，（6）式を（2）に代入すると基本式は

$$\rho \ddot{U}_i=c_{rs}(\partial^2 U_i/\partial x_i \partial x_k)\ \ i,k=1,2,3 \quad r,s=1,2,\cdots,5,6 \quad ik=r \tag{7}$$

となる[1]．水晶の stiffness matrix は

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{11} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \end{bmatrix} \tag{8}$$

と示され[24]，この式を（7）式に代入すると，水晶に対する波動方程式が得られる．一方，平面波が座標軸（x_1, x_2, x_3）と方向余弦（a_1, a_2, a_3）をなす任意の方向に伝播すると仮定し，この時，波動に関する式が誘導し易いように新しい座標系（x_1', x_2', x_3'）をとり，波面の法線が x_1' 軸と一致するようにとれば，波動は角周波数 ω で振動しながら x_1' 方向に速度 v で伝播する．この時，変位の大きさは時間と空間の関数

$$U=\alpha\exp[j\omega(t-x'/v)+j\delta] \tag{9}$$

となる．δ は位相定数である．ところが回転の場合の座標変換公式に従えば

$$x_1'=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3 \tag{10}$$

となるから，これを（9）式に代入して

$$\begin{aligned} U&=\alpha\ \exp\left[j\omega\{t-(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)/v\}+j\delta\right] \\ &=\alpha\ \exp\left[j2\pi\{\nu t-(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)/\lambda\}+j\delta\right] \\ &=\alpha\ \exp\left[(j2\pi/\lambda)\{vt-(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)+j\delta\right] \\ &=A\exp\left[(j2\pi/\lambda)\{vt-(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)\}\right] \end{aligned} \tag{11}$$

と変形される．但し ν, λ はそれぞれ結晶中の波動の振動数，波長である．上式の第3式から第4式への変形には複素振幅 $A=\alpha\exp(j\delta)$ を用いている．又，第2式は波動ベクトル

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{k}|&=1/\lambda \\ \boldsymbol{k}&=k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+k_3\boldsymbol{e}_3 \\ &=a_1/\lambda\ \boldsymbol{e}_1+a_2/\lambda\ \boldsymbol{e}_2+a_3/\lambda\ \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{12}$$

を導入することによって，

$$U=A\ \exp\left[j2\pi(\nu t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right] \tag{13}$$

と書ける，但し（12），（13）式で $\mathbf{e}$ は単位ベクトルで，$\mathbf{r}$ は位置ベクトルであって，次の関係がある．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}&=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3 \\ r&=|\boldsymbol{r}|=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \end{aligned} \tag{14}$$

（13）式を（7）式に代入して整理すれば

$$\begin{bmatrix} \rho\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \\ \rho\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \\ \rho\dfrac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} \\ \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} \\ \dfrac{\partial^2 U_3}{\partial r^2} \end{bmatrix} \tag{15}$$

となる．Γ_{ij} は

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= a_1^2\ c_{11}+a_2^2\ c_{66}+a_3^2\ c_{55}+2a_2\ a_3\ c_{56}+2a_3a_1\ c_{51}+2a_1a_2\ c_{16} \\
\Gamma_{22} &= a_1^2\ c_{66}+a_2^2\ c_{22}+a_3^2\ c_{44}+2a_2\ a_3\ c_{24}+2a_3a_1\ c_{46}+2a_1a_2\ c_{26} \\
\Gamma_{33} &= a_1^2\ c_{55}+a_2^2\ c_{44}+a_3^2\ c_{33}+2a_2\ a_3\ c_{34}+2a_3a_1\ c_{35}+2a_1a_2\ c_{45} \\
\Gamma_{23} &= \Gamma_{32} = a_1^2\ c_{56}+a_2^2\ c_{24}+a_3^2\ c_{34}+a_2a_3(c_{23}+c_{44}) \\
&\quad +a_3a_1(c_{45}+c_{36})+a_1a_2(c_{46}+c_{25}) \\
\Gamma_{13} &= \Gamma_{31} = a_1^2\ c_{15}+a_2^2\ c_{46}+a_3^2\ c_{35}+a_3(c_{45}+c_{36}) \\
&\quad +a_3a_1(c_{31}+c_{55})+a_1a_2(c_{56}+c_{14}) \\
\Gamma_{12} &= \Gamma_{21} = a_1^2\ c_{16}+a_2^2\ c_{26}+a_3^2\ c_{45}+a_2a_3(c_{46}+c_{25}) \\
&\quad +a_3a_1(c_{56}+c_{14})+a_1a_2(c_{12}+c_{66})
\end{aligned} \tag{16}$$

となる．基準位置からの変位を U とみれば，各座標軸方向の成分を（1）式で定義したように（U_1, U_2, U_3）とすれば

$$U=\alpha U_1+\beta U_2+\gamma U_3 \tag{17}$$

とおくことができる．但し α, β, γ は方向余弦を示す．

Christoffel は Fig. 2 に示すような結晶モデルにおける共振周波数は

$$f_r=\frac{m}{2y}\sqrt{\frac{q}{\rho}} \tag{18}$$

で示され，厚味 y 方向に波面をもつ定在波は 3 通り存在し，各々に対する弾性係数 q は次の永年方程式（secular equation）を満足する解として与えられることを示した[20]．

$$\begin{aligned}
\alpha\Gamma_{11}+\beta\Gamma_{12}+\gamma\Gamma_{13} &= \alpha q \\
\alpha\Gamma_{12}+\beta\Gamma_{22}+\gamma\Gamma_{23} &= \beta q \\
\alpha\Gamma_{13}+\beta\Gamma_{23}+\gamma\Gamma_{33} &= \gamma q
\end{aligned} \tag{19}$$

（19）の 3 つの解は全て実数になり

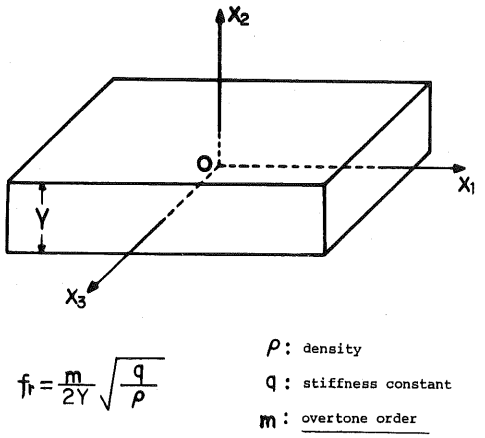

Fig. 2 Cartesian coordinate system for the analysis of a rectangular resonator. x_2-axis is normal to princlpal surfaces of the resonator.

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11}-q & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22}-q & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33}-q \end{vmatrix}=0 \tag{20}$$

を解けば求められる．今，AT−cut 板も含めて板面が x_1 軸（電気軸）に平行な水晶振動子について検討を加えると，板面の法線は常に x_1 軸に垂直であるから法線への方向余弦 a_1, a_2, a_3 の中で a_1 は常に 0 になる．(16) 式に（8）式の定数の関係を考慮して

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}&=\frac{1}{2}a_2^2(c_{11}-c_{12})-a_3^2c_{44}+2a_2a_3c_{14} \\ \Gamma_{22}&=a_2^2c_{11}+a_3^2c_{44}+2a_2a_3c_{14} \\ \Gamma_{33}&=a_2^2c_{44}+a_3^2c_{33} \\ \Gamma_{32}&=\Gamma_{23}=-a_2^2c_{14}+a_2a_3(c_{13}+c_{44}) \\ \Gamma_{13}&=\Gamma_{31}=\Gamma_{12}=\Gamma_{21}=0 \end{aligned} \tag{21}$$

となり，方程式は

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11}-q & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}-q & \Gamma_{23} \\ 0 & \Gamma_{32} & \Gamma_{33}-q \end{vmatrix}=(\Gamma_{11}-q)\left\{\frac{\Gamma_{22}-q}{\Gamma_{32}}-\frac{\Gamma_{32}}{\Gamma_{33}-q}\right\}=0 \tag{22}$$

となり，三次方程式の 1 つの根は

$$q_{(1)}=\Gamma_{11}=\frac{1}{2}a_2^2(c_{11}-c_{12})+a_3^2c_{44}+2a_2a_3c_{14} \tag{23}$$

と示され，他の 2 根は

$$(\Gamma_{22}-q)(\Gamma_{33}-q)-\Gamma_{32}^2=0 \tag{24}$$

なる二次方程式の根となり，2 根とも実数で

$$\begin{aligned} q_{(2)}&=\frac{(\Gamma_{22}+\Gamma_{33})+\sqrt{(\Gamma_{22}+\Gamma_{33})^2+4\Gamma_{32}^2}}{2} \\ q_{(3)}&=\frac{(\Gamma_{22}+\Gamma_{33})-\sqrt{(\Gamma_{22}+\Gamma_{33})^2+4\Gamma_{32}^2}}{2} \end{aligned} \tag{25}$$

となる．今，$q_{(1)}$, $q_{(2)}$, $q_{(3)}$ に対する変位の方向余弦を (17) 式により $(\alpha_{(1)}, \beta_{(1)}, \gamma_{(1)})$, $(\alpha_{(2)}, \beta_{(2)}, \gamma_{(2)})$, $(\alpha_{(3)}, \beta_{(3)}, \gamma_{(3)})$ とすれば，まず，$q_{(1)}=\Gamma_{11}$ なる (23) 式を用いて，(19) 式に代入し

$$\begin{aligned} &\alpha_{(1)}\Gamma_{11}+\beta_{(1)}\ 0\ +\gamma_{(1)}\ 0\ =\alpha_{(1)}\Gamma_{11} \\ &\alpha_{(1)}\ 0\ +\beta_{(1)}\Gamma_{22}+\gamma_{(1)}\Gamma_{23}=\beta_{(1)}\Gamma_{11} \\ &\alpha_{(1)}\ 0\ +\beta_{(1)}\Gamma_{23}+\gamma_{(1)}\Gamma_{33}=\gamma_{(1)}\Gamma_{11} \end{aligned} \tag{26}$$

となる．ここで $\alpha_{(1)}^2+\beta_{(1)}^2+\gamma_{(1)}^2=1$ を用いて上式を整理すれば $\alpha_{(1)}=1$, $\beta_{(1)}=\gamma_{(1)}=0$ であることが知られる．又，$q_{(2)}$, $q_{(3)}$ に同様な考察を加えて $\alpha_{(2)}=0$，$\alpha_{(3)}=0$ となる結果を得る．従って，上記3条件による変位を $U_{(1)}$, $U_{(2)}$, $U_{(3)}$ とすれば（17），（13）式より

$$\begin{aligned} U_{(1)}&=U_1=A_1\ \exp\ j2\pi(\nu_{(1)}t-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1)\\ U_{(2)}&=U_2\beta_{(2)}+U_3\gamma_{(2)}\\ &=A_2\ \exp\ j2\pi(\nu_{(2)}t-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2)\\ U_{(3)}&=U_2\beta_{(3)}+U_3\gamma_{(3)}\\ &=A_3\ \exp\ j2\pi(\nu_{(3)}t-\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{r}_3) \end{aligned} \tag{27}$$

となり，各々に対する固有周波数は（18）式により

$$\begin{aligned} \nu_{(1)}&=(f_r)_1=\frac{m}{2y}\sqrt{\frac{q_{(1)}}{\rho}}\\ \nu_{(2)}&=(f_r)_2=\frac{m}{2y}\sqrt{\frac{q_{(2)}}{\rho}}\\ \nu_{(3)}&=(f_r)_3=\frac{m}{2y}\sqrt{\frac{q_{(3)}}{\rho}} \end{aligned} \tag{27}$$

となる，但し上式で y は定在波が乗る一端面からもう一方のこれに平行な端面間の路離である．mは倍振動の次数である．さて，(27) 式で示される3種類の弾性波の内でいずれのものが圧電的に実現し得るかを調べてみる．

この場合，振動子の板面は x_1 軸に平行であるから，振動子を平行電極間に置いて電界を加えた時，板に働く電界には x_1 方向の成分が存在せず，x_2 軸方向の電界成分 E_2 と x_3 軸方向の電界成分 E_3 のみが存在する．しかし，水晶は一軸性の結晶であるから，結晶の性質上，E_3 によっては全くひずみを生ぜしめることはできないから，E_2 のみが水晶振動子の励振に有効な成分となる．水晶結晶の圧電的特性は Curi 兄弟によって調べられて

$$\begin{aligned} &S_1=d_{11}E_1, \quad S_2=-d_{11}E_1, \quad S_4=d_{14}E_1\\ &S_5=-d_{14}E_2, \quad S_6=-2d_{11}E_2, \end{aligned} \tag{28}$$

となっている．従って，E_2 によって与えられるひずみは（28）式の第2行目の成分のみとなる．故にひずみは

$$S_5=\frac{\partial U_1}{\partial x_3}+\frac{\partial U_3}{\partial x_1},\quad S_6=\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \tag{29}$$

の2種類に限られる．(27) 式からも明らかなように共振周波数を決定するのは板の厚味 y（x_2 軸方向）なので電気軸方向 x_1 には無関係となる．従って E_2 によって発生可能なひずみ（29）式の各項の中で $\partial U_1/\partial x_2$ のみが実現する．これは（22）式の方程式の第1番目の根 $q_{(1)}$，即ち，(23) 式を弾性定数として振動するもので，変位 U_1 は x_1 軸方向で振動し，定在波は x_2 軸方向に乗る横波となり，厚味辷り振動（thickness-shear vibration mode）となる．その共振周波数は（27）式に（23）式を代入して

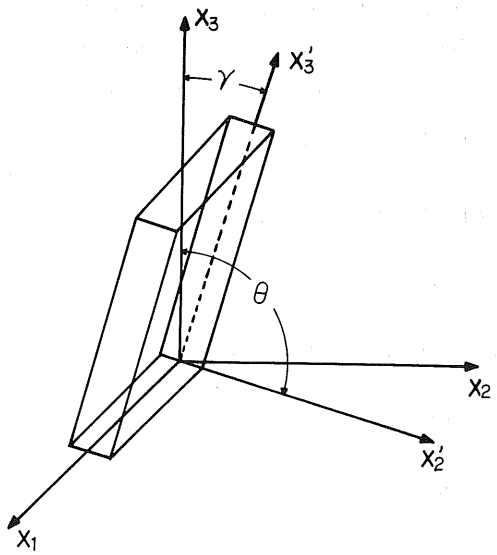

Fig. 3 AT−cut quartz crystal plate coordinate system (x_1', x_2', x_3') referred to crystallographic axes of quartz crystal.

$$\begin{aligned} f_r &= h/2y\cdot\sqrt{\rho}^{-1}\{1/2\cdot a_2^2(c_{11}-c_{12})+a_3^2c_{44} \\ &\qquad +2a_2a_3c_{14}\}^{1/2} \\ &=(h/2y)(1/\sqrt{\rho})\cdot\{1/2\cdot(c_{11}-c_{12})\sin^2\theta \\ &\qquad +c_{44}\cos^2\theta+c_{14}\sin 2\theta\}^{1/2} \end{aligned} \tag{30}$$

となる．但し θ は水晶板の法線 x_2' と x_3 軸との作る角で，この様子を AT−cut 板について Fig. 3 に示す．

通常，切出し角は実用的に水晶結晶の光軸 x_3 と板面とが作る角(Fig. 3 で x_3' で表示) $\gamma=\theta-\pi/2$ で示す．

§ 3．Plano-Convex AT−cut 水晶板の解析への方向

前節で論議した結論は無限平板近似できるような条件下での振動子についてであって，現実の水晶振動子は必ずしも前述の条件に一致しない．AT−cut 水晶振動子に対する振動解析には方形板のように境界が明確な形状のものに対しては Mindlin[1]，古賀[2] らの解析的な方法が有名である．又，Mandlin は円板状の振動子の解析も行っている[3]．円板状の AT−cut 水晶振動子の変位分布は福与らによって研究されて，探針法による実測値と解析解との比較を行っている[4]．

現実の AT−cut 水晶振動子の利用として，convex 形の振動子が多いにもかかわらず，解析例が少ない．biconvex AT−cut 振動子の基本振動の解析に福与らの報告[16] があり，曲率をもった振動子の厚味すべり振動についての一般的な取扱いに尾上らの報告がある[17]．Wilson は前節において述べたように plano-convex AT−cut 水晶振動子で板が薄く直径が大きな場合，これが放物面状のポテン

シャル井戸を有する振動体であると仮定して解析を加えている[5]．Wilson の取扱い方は普遍化が可能であるが，現状で広く用いられている振動子の形状で，板の周辺を適当な直径で切断し，直径に対して厚みを比較的厚くして，倍振動で用いるような plano-convex AT−cut 水晶振動子に適用すると誤差が大きくなる[21]．

本研究においては上記の難点をカバーする解析方法をみつけだして行く．比較のために Fig. 4 に Wilson の近似がよく成立する plano-convex AT−cut 水晶振動子と Wilson の解法では誤差が大きくなる形状の振動子を示しておく．

同図において，(a) は曲率半径の大きい球体の一部を切り取って得た plano-convex 板であり，Wilson の解法で十分シュミレーション可能なタイプ，(b) は厚味 h_o に比較して板の直径 d がそれ程大きくない plano-convex AT−cut 水晶振動子で本研究で解析の対象とするものである[21,27]．

通常，AT−cut 振動子は (b) のタイプの板が多く，3次か5次の倍振動モードで用いられている．

振動子に対する解析的な解を得ようとする場合，(7) 式を境界条件を満足しつつ解き，(13) 式の具体的な値を得ることにつきるが plano-convex のように凸レンズ状にして横方向の境界にあいまいにした点に特色がある板に対しては (13) 式で示される具体的な厳密解を得ることは不可能に近い．従って，著者が試みようとしている．理論的解析と有限要素の結合による振動体の解析方法は計算機のメモリーの節約と言うばかりでなく，計算の精度を上げる方法とも言える．

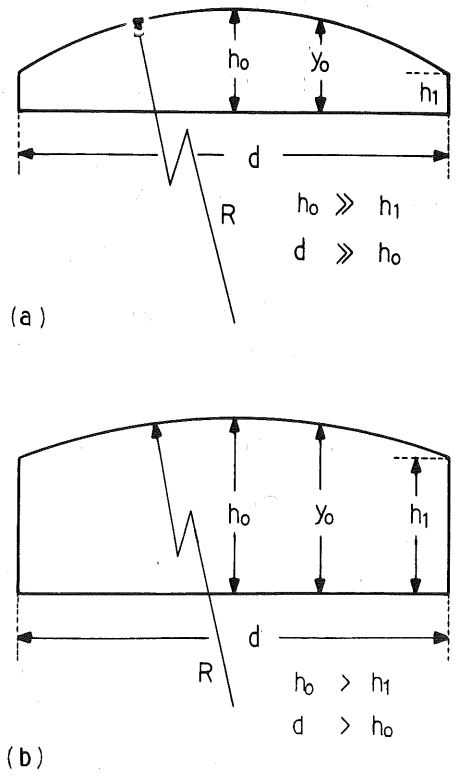

Fig. 4 Two types of plano-convex AT−cut quartz crystal plate. (a) It can be analyzed by the quadratic potential well approximation and (b) this type has to analyse strict potential well.

§ 4. Plano-convex AT−cut 水晶振動子の運動方程式

無限平板近似が可能な AT−cut 振動子が厚味辷り振動を行う場合，座標系を AT−cut 板に固定した AT−cut coordinate (x_1', x_2', x_3') に対して，変位成分 U_1 が x_1' 方向にあり，定在波が x_2' に乗っているケースについての運動方程式を § 2 で議論した．今，AT−cut 板が厚味辷り振動を行う場合の運動方程式をたてる，U_1 に比較して U_2, U_3 は極めて小さく，無視できるならば (7) 式は

$$c_{11}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1'^2}+c_{55}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2}+c_{66}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2'^2}+c_{56}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2' \partial x_3'}=\rho\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \tag{31}$$

と示される．水晶結晶においては $c_{55} >> c_{56}$ であるから，上式の第4項が無視されて

$$c_{11}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1'^2}+c_{55}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3'^2}+c_{66}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2'^2}=\rho\frac{\partial^2 U_1}{\partial t_2} \tag{32}$$

と更に簡略化される．上式を境界条件を満足させつつ解けば問題はないのであるが，直接解をみつけることはまず不可能である．しかし，ここで U_1 が x_2' 方向（厚味方向）において，中央部で余弦関係状に分布すると言う事実が確認できれば（32）式は更に簡略化できる可能性がある．

事実，先の研究で明らかになったように，偏光光線走査法で測定した応力分布及び有限要素法による simulation の値も正弦関数状であった[9,10,15,21,26]．この結果を Fig. 5，6，7 に示す．変位 U_1 は応力 T_6' の x_2' 方向の積分値と相似になるので，U_1 は振動子の中心部分で x_2' 方向に余弦関数状に分布していることが確認できた．即ち

$$U_1=U_1'(x_1', x_3')\cos(m\pi x_2'/y_0)\cdot e^{jwt} \tag{33}$$

となる．但し y_o は板の x_2' 方向の厚味で，m は倍振動の次数である．上式は U_1' (x_1', x_3') の項を含んでいるので変位の分布 U_1 は（$x_1'-x_3'$）平面内で U_1' (x_1', x_3') の形で分布する．球面状の plano-convex では

$$y_0=\sqrt{R^2-(x_1'^2-x_3'^2)}-R+h_0 \tag{34}$$

とおくことができる．R, h_o は Fig. 4 に示したように plano-convex 板の曲率半径，板の中心の厚味を示す．

今後の取扱いが容易に行えるように（33）式を

$$\begin{aligned}&U_1=U_1'(x_1', x_3')\quad B(x_1', x_2', x_3')\\&\qquad\text{ここで}B(x_1', x_2', x_3')=\cos\frac{m\pi x_2'}{y_0(x_1', x_3')}e^{jwt}\end{aligned} \tag{35}$$

とおく，（35）式を（32）式に代入すれば

$$\begin{aligned}&c_{11}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1'^2}B+\frac{\partial U}{\partial x_1'}\frac{\partial B}{\partial x_1'}+\frac{\partial^2 B}{\partial x_1'^2}U+\frac{\partial B}{\partial x_1'}\frac{\partial U}{\partial x_1'}\right)\\&+c_{55}\left(\frac{\partial^2 U_1'}{\partial x_3'^2}B+\frac{\partial U_1'}{\partial x_3'}\frac{\partial B}{\partial x_3'}+\frac{\partial^2 B}{\partial x_3'^2}U_1'+\frac{\partial B}{\partial x_3'}\frac{\partial U_1'}{\partial x_3'}\right)\\&+c_{66}\left(\frac{\partial^2 U_1'}{\partial x_2'^2}B+\frac{\partial U_1'}{\partial x_2'}\frac{\partial B}{\partial x_2'}+\frac{\partial^2 B}{\partial x_2'^2}U_1'+\frac{\partial B}{\partial x_2'}\frac{\partial U_1'}{\partial x_2'}\right)\\&=\rho\frac{\partial}{\partial t^2}(U_1'B)\end{aligned} \tag{36}$$

となる．U_1' は x_1' と x_3' の関数であるから $\partial U_1'/\partial x_2'=0$，$\partial^2 U_1'/\partial x_2'^2=0$ であり，又，B は x_1', x_3' に関して一定値をとるような調和振動であるから $\partial B/\partial x_1'=0$，$\partial^2 B/\partial x_1'^2=0$，$\partial B/\partial x_3'=0$，$\partial^2 B/\partial x_3'^2=0$ となり，これらの条件を（36）式に代入すれば

$$c_{11}\left(\frac{\partial^2 U_1'}{\partial x_1'^2}B\right)+c_{55}\left(\frac{\partial^2 U_1'}{\partial x_3'^2}B\right)+c_{66}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x_2'^2}U_1'\right)=\rho\frac{\partial^2(U_1'B)}{\partial t^2} \tag{37}$$

となる．上式に（35）式の B の値を代入すると左辺は

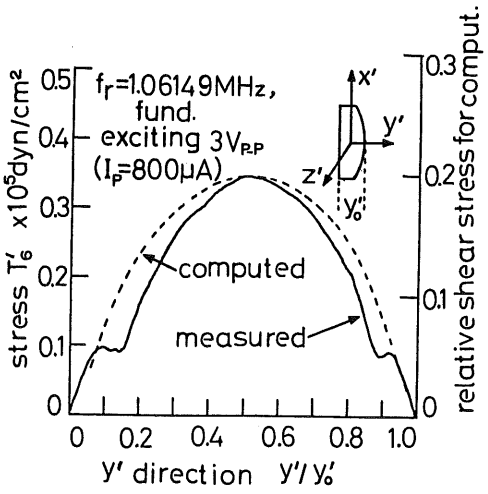

Fig. 5 Thickenss shear stress distribution of plano-convex AT−cut plate.

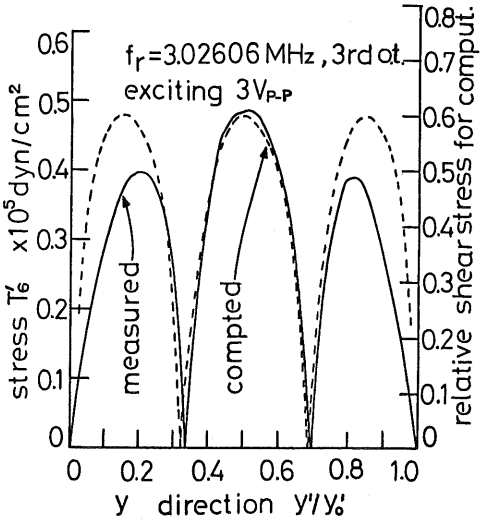

Fig. 6 Thickness shear stress distribution of plano-convex AT−cut plate.

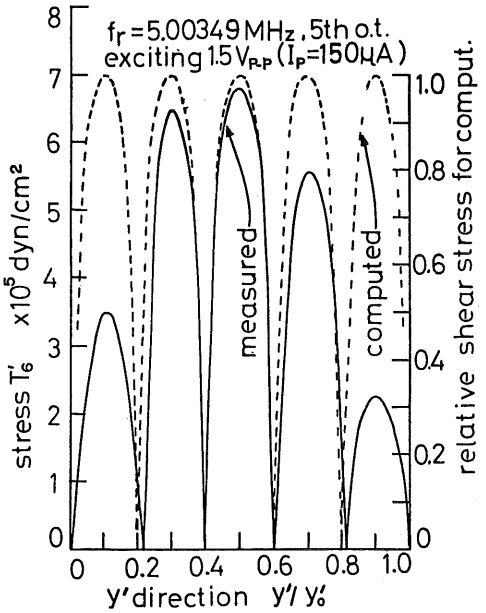

Fig. 7 Thickness shear stress distribution of plano-convex AT−cut plate.

$$\left\{c_{11}\left(\frac{\partial^2 U_1'}{\partial x_1'^2}\right)+c_{55}\left(\frac{\partial^2 U_1'}{\partial x_3'^2}\right)-c_{66}U_1'\left(\frac{m\pi}{y_0}\right)^2\right\}\cos\frac{m\pi x_2'}{y_0}\cdot e^{jwt}$$

となり，右辺は

$$\rho\frac{\partial^2(U_1'B)}{\partial t^2}=\rho\left(\frac{\partial^2 U_1'}{\partial t^2}B+2\frac{\partial U_1'}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}U_1'\right)$$

となる．$\partial U_1'/\partial t=0$，$\partial^2 U_1'/\partial t^2=0$ であるから結局，右辺は更に簡略化されて

$$-\rho w^2\cos\frac{m\pi x_2'}{y_0}\cdot e^{jwt}$$

となる．従って（36）式は

$$\left(c_{11}\frac{\partial^2 U_1'}{\partial x_1'^2}+c_{55}\frac{\partial^2 U_1'}{\partial x_3'^2}\right)+\left\{\rho\omega^2 U_1'-c_{66}U_1'\left(\frac{m\pi}{h_0}\right)^2\right\}$$
$$-c_{66}U_1'\left(\frac{m\pi}{h_0}\right)^2\left(\frac{h_0^2}{y_0^2}-1\right)=0 \tag{38}$$

と変形される．但し（38）式の誘導で

$$-c_{66}\left(\frac{m\pi}{y_0}\right)^2=c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_0}\right)^2\left(1-\frac{h_0^2}{y_0^2}-1\right) \tag{39}$$

なる関係を用いた．更に

$$g(x_1', x_3')=\frac{h_0^2}{y_0^2}-1=\frac{h_0^2}{(\sqrt{R^2-(x_1'^2+x_3'^2)}-R+h_0)^2}-1$$
$$\simeq\frac{1}{Rh_0}(x_1'^2+x_3'^2) \tag{40}$$

なる近似式を（38）式に代入すると

$$c_{11}\frac{\partial^2 U_1'}{\partial x_1'^2}+c_{55}\frac{\partial^2 U_1'}{\partial x_3'^2}+\left[\rho\omega^2-c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_0}\right)^2+c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_0}\right)^2\left(\frac{x_1'^2+x_3'^2}{Rh_0}\right)\right]U_1'=0 \tag{41}$$

となる．この式は Wilson が彼の論文の中で示した，放物面ポテンシャル井戸近似で導いた plano-convex AT−cut 水晶振動子に対する運動方程式である．(41) 式は回転放物面をポテンシャル項とする2次元調和振動子を表わす —— Schrödinger 方程式と同等になる[21]．(41)式において c_{11} と c_{55} とは等しくないので非等方性弾性体の振動を示し，このことから固有値の縮退は起らないものと考えられる．しかし，c_{11} と c_{55} は単純な有理数の比にならないので x_1' と x_3' 方向に無限に続く解が予想される．(41) 式の解は1価連続，1次微係数が連続かつ解の2乗積分が可能であると言う条件の下で変位の振幅は

$$U_1'(x_1, x_3)=H_{n-1}(x_1'/a_1)H_{p-1}(x_3'/a_5)\cdot\exp(-x_1'^2/2a_1^2)\cdot\exp(-x_3'^2/2a_5^2) \tag{42}$$

となり，上式で

$$a_1^4=\frac{Rh_0^3c_{11}}{m^2\pi^2c_{66}}\ ,\quad a_5^4=\frac{Rh_0^3c_{55}}{m^2\pi^2c_{66}}$$

を表わし，角周波数は

$$w^2=\frac{c_{66}}{\rho}\left(\frac{m\pi}{h_0}\right)^2+\frac{c_{11}}{\rho}(2n-1)\frac{m\pi}{\sqrt{Rh_0^3}}\left(\frac{c_{66}}{c_{11}}\right)^{1/2}+\frac{c_{55}}{\rho}(2P-1)\frac{m\pi}{\sqrt{Rh_0^3}}\left(\frac{c_{66}}{c_{55}}\right)^{1/2} \tag{43}$$

ここで$n=1, 2, 3, 4, \cdots\cdots$

$P=1, 2, 3, 4, \cdots\cdots$

で示される．(42) 式の $H_{n-1}(x_1'/a_1)$, $H_{p-1}(x_3'/a_5)$ は Hermite の多項式であり

$$\begin{aligned} H_0(x)&=1 & H_3(x)&=8x^3-12x \\ H_1(x)&=2x & H_4(x)&=16x^4-48x^2+2 \\ H_2(x)&=4x^2-2 & H_5(x)&=32x^5-160x^3+120x \end{aligned} \tag{44}$$

で与えられる[12]．例えば $n=p=1$ の場合，$H_o(x)=1$ となり (42) 式は

$$U_1'(x_1', x_3')=\exp(-x_1'^2/2a_1^2)\cdot\exp(-x_3'^2/2a_5^2) \tag{45}$$

となり，変位の振幅の分布は x_1', x_3' 方向に各々ガウス分布を示し Fig. 8 のようになる．これは plano-convex AT−cut 水晶振動子の基本厚味辷り振動に対する Wilson の近似解による表面変位の分布を示す．インハーモニック振動は Hermite 多項式の高次の場合に相当し，$n=3$, $p=1$ では (42) 式は (44) 式を用いて

$$U_1'(x_1', x_3')=\{(x_1'/a_1)^2-1\}\exp(-x_1'/2a_1^2)\cdot\exp(-x_3'^2/2a_5^2) \tag{46}$$

となる．(45) 及び (46) 式で示される解は変数が分離していて簡潔な形式になっている．実測との比較では，変位の分布は中央部でよく合うが周辺部では実測値とのづれが大きくなって来る[21]．この原因は(40)式で行った近似に問題がある．(40)式の $g(x_1', x_3')$ は放物面を示し，この近似は (x_1', x_3')

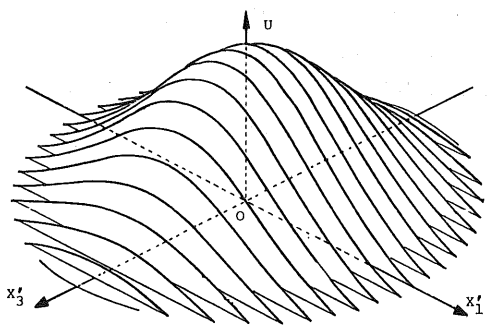

Fig. 8 Thickness shear vibration mode of plano-convex AT−cut quartz crystal resonator with fundamental oscillation ferequency ($m=1$, $n=1$, $p=1$).

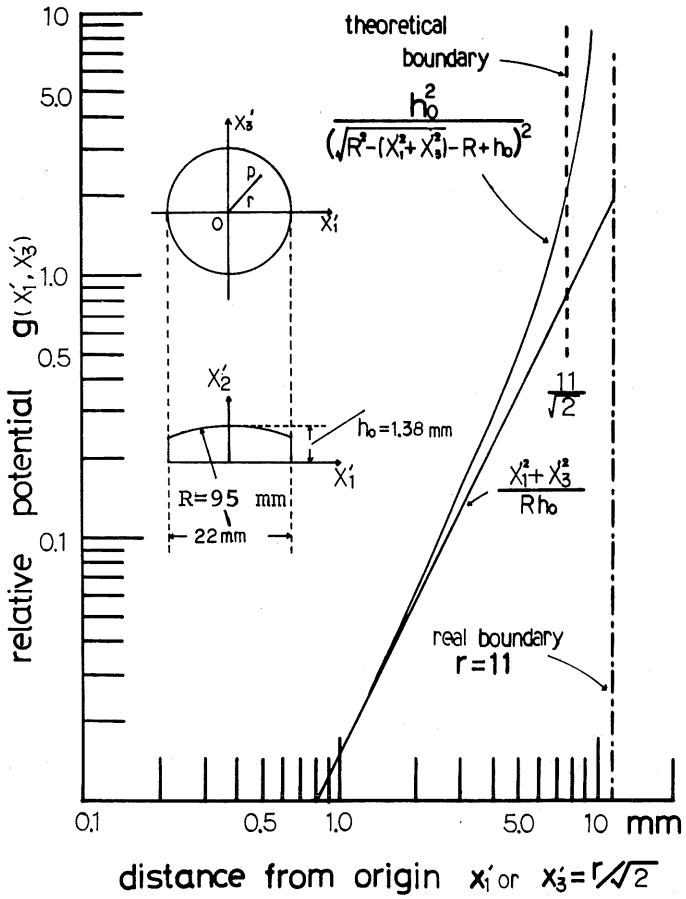

Fig. 9 Relative depth of potential well for the vibration of plano-convex AT−cut quartz crystal resonator.

を $(x_1'^2+x_3'^2)$ で展開した第1項に相当し，$R>>(x_1'^2+x_3'^2)$ の場合によい近似となるが，実用されている plano-convex AT−cut 水晶板ではこの近似条件に合致しないものも多い．Fig. 9 に実用されている振動子に対する $g(x_1', x_3')$ の厳密な計算値と放物面近似の比較を示す．周辺部に行くに従って，両者の差が開くことが知られる，(43) 式で示される角周波数についても，実測値と数%の誤差を伴う[21]．従って解析値の誤差を小さくするためには (40) 式を完全な形で用いたい．しかし，そのようにすると (38) 式が容易に解けないと言う重大な障害に直面する．そこで § 3 で述べた手法を導入して解析を加える．

§ 5．理論解析と有限要素法の結合

5.1 理論的背景

Wilson が仮定した放物面ポテンシャル井戸 $g(x_1', x_3') = (x_1'^2 + x_3')/Rh_o$ は (42), (43) 式で振動子の直径が x_1', x_3' 方向に無限に連続していると言う条件下のものである．これに対して，通常実用されている plano-convex AT－cut 水晶振動子は適当な直径をもたせて，周辺部分が切取られている．Fig. 4 を再度，見るとその相違が明瞭になる．

波動を扱う一般的な手法として，ある定められた領域の中に波動エネルギーが存在するか否かを検討する場合，その点の波の振幅の 2 乗が正で有限な値をとるか否かを調べてみればよい．即ち，確立関数を検討することである．水晶振動子の直径が有限な大きさであると言う条件で解を求める場合，解に対する制限は次のようにしなければならない．

（1）解の絶対値の 2 乗は直径以内の領域で積分が可能，

（2）（1）の領域の外側においては解は存在しない．

水晶振動子の直径を d とするならば波動が閉じ込められているポテンシャル井戸の障壁の境界は

$$x_1'^2 + x_3'^2 = (d/2)^2 \tag{46}$$

で示される．(46) 式の外側では解はゼロになる．

Wilson が仮定した放物面ポテンシャル井と厳密な取扱いでのポテンシャル井戸（無限障壁ポテンシャル井戸）とそこでの確立関数の比較図を Fig. 10 に示す．同図 (a) では障壁の外側にも $|U|^2$ が存在し，（b）では存在しない，これは (38) 式の最右項，即ち Schrödinger 方程式のポテンシャル項は d の外側では無限大になることに相当する[12]．

現実の水晶振動子では振動子を構成している水晶結晶以外のところでは弾性波が存在し得えない

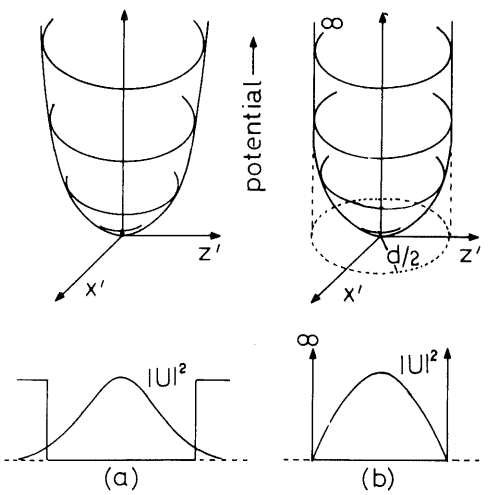

Fig. 10 Two types of potential well. (a) Quadratic potential well and (b) infinite depth potential well.

のであるから（b）のようなポテンシャル井戸を考えなければならないのは当然である．即ちポテンシャル項は（46）式で示される領域の内，外で各々

$$g(x)_{in}=\left(\frac{h_0}{y_0}\right)^2-1=\left(\frac{h_0}{\sqrt{R^2-(x_1'^2+x_3'^2)}-R+h_0}\right)^2-1$$
$$g(x)_{out}=\infty \tag{47}$$

となる．この条件の下で（38）式が直接解ければ申し分ない．しかし，前述したように解析的手法で（38）式を解くことは不可能に近い．従って（38）式を有限要素法によって数値的に解くことに主目的を置く．有限要素法は解くべき領域内をいくつかの小領域に分割して，分割した小領域を適当な補間関数で近似して，全体を表わし解を得ようとするものである．解の根拠となるのは系の汎関数をまず導出し，その汎関数が最小になる解を求める手法である．汎関数として系のLagrangianを作り，その変分ΔLをゼロならしめる値が解になる．

（38）式の第一項，第3項に関するエネルギーをまとめてTとすれば，第1項，第3項にU_1'をかけて，積分を実行し，Greenの定理[13]を用いて整理すると

$$T=\frac{1}{2}\iint\left\{c_{11}\left(\frac{\partial U_1'}{\partial x_1'}\right)^2+c_{55}\left(\frac{\partial U_1'}{\partial x_3'}\right)^2\right\}dx_1'dx_3'$$
$$+\frac{1}{2}\iint c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_0}\right)^2 g(x_1',x_3')U_1'^2dx_1'dx_3' \tag{48}$$

と示される．次に第2項目の慣性力に関するエネルギー（運動エネルギー）をKとすれば

$$K=\frac{1}{2}\iint\lambda U_1'^2dx_1'dx_3', \tag{49}$$

ここで　$\lambda=\rho\omega^2-c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_0}\right)^2$

となる．この系のLagrangin は

$$\mathcal{L}=T-K \tag{50}$$

であるから，（50）式を最小ならしめるU_1'を求めればこれが解になる．この手続を進めるためにLの変分ΔLを求める．変分の定義に従って誘導すれば

$$\Delta\mathcal{L}=\iint\left(c_{11}\frac{\partial U_1'}{\partial x_1'}\frac{\partial\Delta U_1'}{\partial x_1'}+c_{55}\frac{\partial U_1'}{\partial x_3'}\frac{\partial\Delta U_1'}{\partial x_3'}\right)dx_1'dx_3'$$
$$+\iint f(x_1',x_3')U_1'\Delta U_1'dx_1'dx_3'-\lambda\iint U_1'\Delta U_1'dx_1'dx_3', \tag{51}$$

ここで　$f(x_1',x_3')=c_{66}(m\pi/h_0)^2g(x_1',x_3')$

となる[14]．$\Delta\mathcal{L}=0$の時に$\mathcal{L}$は最小値をとり，この時λは固有値（共振周波数）を与え，U_1'は固有関数（振動の変位）を与える．（51）式で変分を求める計算の途中で境界を含むような積分も出て来るが，境界条件をディリクレ型の固定境界条件で解くために，これらの項は全てゼロになり，式の中に示していない．

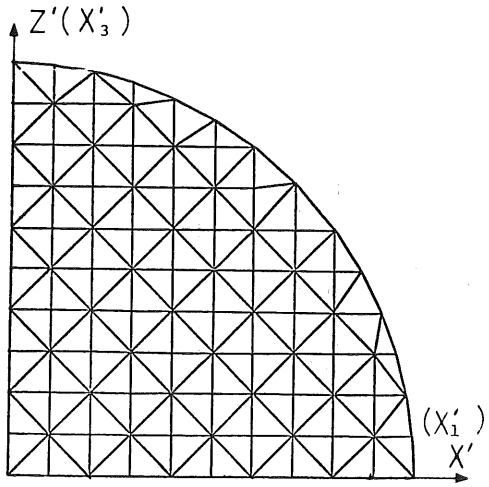

Fig. 11 Diagram showing a 98−node, 160−element system covering a quater circular quartz plate.

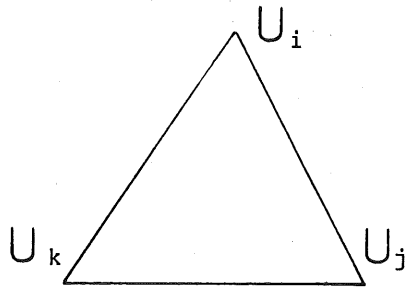

Fig. 12 A trinangle element.

§ 6. 有限要素性による解

6.1 計算の実行

(51) 式から U_1' を求めるために有限要素法を用いる．領域は振動子の主面 ($x_1'-x_3'$) で点対称の三角形要素に分割する．このように要素の分割を行うと振動子の 1/4 を検討すればよく，計算機のメモリーの節約になる．分割結果を Fig. 11 に示す，これは自動節点の計算で自動分割を行って画いたものである．この場合，x_1' 軸，x_3' 軸上ではノイマンの境界条件は自動的に満足され板の 1/4 を検討すればよいことになる．要素として三角形を選んだ理由は，三角形は形状上の自由度が最も大きいためである．三角形の頂点を節点と言い，それぞれ i, j, k なる記号をもたせる．三角形要素の図を Fig. 12 に示す．

三角形内部の変位 U_e は各々の節点の変位 U_i, U_j, U_k の一次関数で補間することができる．要素内のポテンシャルエネルギーは

$$T_e=\frac{1}{2}\iint\{U_i\ U_j\ U_k\}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\begin{Bmatrix}U_i\\U_j\\U_k\end{Bmatrix}dx'\,dz'+\frac{1}{2}\iint\{U_i\ U_j\ U_k\}\boldsymbol{f}\begin{Bmatrix}U_i\\U_j\\U_k\end{Bmatrix}dx'\,dz' \tag{52}$$

となる．上式で

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}c_{55}^{1/2}(z_j'-z_k') & c_{55}^{1/2}(z_k'-z_i') & c_{55}^{1/2}(z_j-z_i)\\ c_{11}^{1/2}(x_k'-x_j') & c_{11}^{1/2}(x_j'-x_k') & c_{11}^{1/2}(x_j'-x_i')\end{bmatrix} \tag{53}$$

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{\Delta^2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \tag{54}$$

である．但し添字が複雑化するので $x_1'=x'$, $x_3'=z'$ とおきかえてある．Δ は三角形要素面積の 2 倍である．更に第 2 項目で，三角形要素の節点における

$$\boldsymbol{f}=c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_0}\right)^2\left\{\left(\frac{h_0}{y_0}\right)^2-1\right\} \tag{55}$$

を f_i, f_j, f_k とすれば

$$\boldsymbol{f}=\begin{Bmatrix} \frac{1}{10}f_i+\frac{1}{30}f_j+\frac{1}{30}f_k & \frac{1}{30}f_i+\frac{1}{30}f_j+\frac{1}{60}f_k & \frac{1}{30}f_i+\frac{1}{60}f_j+\frac{1}{30}f_k \\ \frac{1}{30}f_i+\frac{1}{30}f_j+\frac{1}{60}f_k & \frac{1}{30}f_i+\frac{1}{10}f_j+\frac{1}{30}f_k & \frac{1}{60}f_i+\frac{1}{30}f_j+\frac{1}{30}f_k \\ \frac{1}{30}f_i+\frac{1}{60}f_j+\frac{1}{30}f_k & \frac{1}{60}f_i+\frac{1}{30}f_j+\frac{1}{30}f_k & \frac{1}{30}f_i+\frac{1}{30}f_j+\frac{1}{10}f_k \end{Bmatrix} \tag{56}$$

となる．次に要素の運動エネルギーを K_e とすれば

$$K_e=\frac{\lambda}{2}\int\int\begin{bmatrix}U_i & U_j & U_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12}\\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_i\\ U_j\\ U_k\end{bmatrix}dx_1'dx_3' \tag{57}$$

のようになる．要素内の変位 U_e は一次の関数であるから (52), (57) 式の積分は容易に実行できる．積分を行って (51) 式に代入すると

$$\frac{1}{2}[\boldsymbol{K}]\begin{bmatrix}U_i\\ U_j\\ U_k\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\lambda[\boldsymbol{M}]\begin{bmatrix}U_i\\ U_j\\ U_k\end{bmatrix} \tag{58}$$

となる．但し上式で $[K]$, $[M]$ は各々

$$[\boldsymbol{M}]=\Delta\begin{bmatrix}1/12 & 1/24 & 1/24\\ 1/24 & 1/12 & 1/24\\ 1/24 & 1/24 & 1/12\end{bmatrix} \tag{59}$$

$$[\boldsymbol{K}]=\begin{bmatrix} c_{55}(z_j-z_k)^2+c_{11}(x_k-x_i)^2 & c_{55}(z_j-z_k)(z_k-z_i)+c_{11}(x_j-x_k)(x_i-x_k) & c_{55}(z_j-z_k)(z_i-z_j)+c_{11}(x_k-x_j)(x_j-x_i) \\ c_{55}(z_j-z_k)(z_k-z_j)+c_{11}(x_j-x_k)(x_i-x_k) & c_{55}(z_k-z_i)^2+c_{11}(x_i-x_k)^2 & c_{55}(z_k-z_i)(z_i-z_j)+c_{11}(x_i-x_k)(x_j-x_i) \\ c_{55}(z_j-z_k)(z_i-z_j)+c_{11}(x_k-x_j)(x_j-x_i) & c_{55}(z_k-z_i)(z_i-z_j)+c_{11}(x_i-x_k)(x_j-x_i) & c_{55}(z_i-z_j)^2+c_{11}(x_j-x_i)^2 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{\Delta}{2}\boldsymbol{f} \tag{60}$$

である．(58) 式は一つの要素についての関係式であるが，この関係は全要素について成立するので，全要素を網羅した連立固有方程式を作り，固有値，固有ベクトルを求めると解になる．計算の方法としては QR 法を利用した．

無限障壁のポテンシャル井戸を仮定しているので，周辺の境界上で解がゼロであるように固定する．この場合，節点に対応するマトリックスの行と列から境界上に対応する節点をぬきとればよい．要素モデルは振動子板の 1/4 のみを扱っているために，x_1', x_3' 軸上の節点は全て自由で，何の束縛も加えられておらず，従ってノイマンの境界付件 $\partial U_1'/\partial n=0$ が満足されるようにする．故に x_1', x_3' に対称な偶関数の解が得られるであろう．x_1' 軸上の節点を固定すると，x_3' 軸にそって奇関数になる解が得られるであろう．

水晶の stiffness 定数は Masson によって与えられていて

$$c_{11}^0=86.05,\ c_{12}^0=5.05,\quad c_{13}^0=10.45,\quad c_{14}^0=18.25$$
$$c_{33}^0=107.1,\ c_{44}^0=58.65,\ c_{66}^0=(c_{11}^0-c_{12}^0)/2=40.73 \tag{61}$$
$$All\times 10^{10}\ dyn/cm^2$$

となるこれを AT−cut 板に変換すると

$$c_{11}'=86.05,\ c_{12}'=-10.49,\ c_{22}'=129.9,\ c_{55}'=67.11$$
$$c_{66}'=29.34\qquad All\times 10^{10}\ dyn/cm^2 \tag{62}$$

となる[1]．密度は

$$\rho=2.65g/cm^3 \tag{63}$$

である[1]．但し変換は次の公式

$$[c_{ij}']=[F_1][c_{rs}^0][D_2] \tag{64}$$

によって行った[26]．

6.2 実測値と計算値との比較[21]

（a）共振同波数の比較

直径 $d=1.5$ cm, 曲率半径 9.5 cm, 中心部の厚み $h_o=0.168$ cm の plano-convex AT−cut 水晶振動子を用いて，共振時における実測値と計算値との比較を行った．参考のために Wilson の近似公式を用いて計算した共振周波数の値も並記する．これらの値を Table 1 に示す．表中で m は厚知すべり振動の次数を示し，n と p はそれぞれ x_1', x_3' 方向のインハーモニック倍振動の次数である．百分率表示は実測値に対する計算値の誤差を示し，｜（実測値）−（計算値）｜/（実測値）×100% で示されている．(51) 式に対する有限要素法による解法は極めて高精度であることが知られる．

（b）変位分布 U_1' (x_1', x_3') の比較

次に厚味辷り振動の変位の振幅分布 $U_1'(x_1', x_3')$ について実測した値と (51) 式を有限要素法を用いた固有関数とお比較する．U_1' の分布については飯島らがレーザ干渉計を用いて測定したものが報告されているので[7,8]，実測値としてその結果を用いる．飯島らは $R=95$ mm, $d=22$ mm, $h_o=$

Table 1 共振周波数の比較（単位kHz）

m	n/p	実 測 値	計 算 値	ウィルソンの式	備 考
1	1／1	1,052.0	1,044.5 (0.7%)	1,030.9 (2.0%)	基本厚みすべり振動
1	1／3	1,189.3	1,187.1 (0.16%)	1,103.2 (0.7%)	
1	3／1	1,222.3	1,223.2 (0.07%)	1,111.6 (9.0%)	3次インハーモニック
1	5／1	1,503.6	1,504.8 (0.08%)	1,276.9 (15.1%)	5次インハーモニック
1	1／1	3,024.6	3,013.3 (0.3%)	3,006.7 (0.6%)	3次倍振動
1	1／1	4,999.8	4,994.8 (0.1%)	4,974.6 (0.5%)	5次倍振動

Plano-convex AT-cut quartz resonator;R=95mm, b=14mm, h_0=1.68mm

Table 2 共振周波数の比較

m	n/p	実測値(kHz)	計算値(kHz)	Willsonの式(kHz)
1	1／1	1,286.0	1,281.0	1,275.8
1	1／2	1,349.0	1,347.5	1,340.2

1.38 mm の plano-convex AT−cut 板を用いて実験を行い共振周波数の実測値は Table 2 のようになった事を示している．Table 1 と同様 Wilson の近似式による共振周波数の値も並記しておく．

厚味辷り振動の変位の振幅 U_1' の x_1', x_3' 軸方向の分布の様子を Fig. 13 に示す．同図の分布は $m=1$; $n, p=1$，1 の基本厚味辷り振動の値を示し，丸印は測定値で実線は本方法によって計算した値で点線は Wilson の近似式 (42) によって計算した値である．予想したように右側は実測値と極めてよい一致を示し，左側では周辺部に移るに従って，計算値は実測値から隔れる．即ち，理論解析と有限要素法のコンビネーションによる解析方法は高い精度を有することがわかる．

$m=1$; $n, p=1$，2 のインハーモニック振動についての実測値（飯島らによる）と本方法による計算値との比較を Fig. 14 に示す．x_1' 軸（or x' 軸）方向の値では両者はよい一致を示す．

（c）振動子内部での T_6' (x_1', x_3') 分布の比較

飯島らの U_1' の分布は振動子の表面上での変位の測定であり，この値は著者が試みた新解析方法で適確に再現できることが先記の検討で明らかになった．しかし，内部の振動の様子がどのようになっているかは，これだけでは何んとも結論づけられない．内部の振動の情報が得られてはじめて，振動子全体の様子が実験的に把握できるのである．特に，自然現象を解明しようとする場合，ガリレオ等自然科学の先駆者がたどった道程，即ち，「自然科学においては実験事実に立却しなければ，どんな発言も意味がない」と言うところまでさかのぼってみるのも基礎的な発展において形要なことである．

好都合なことに，振動子内部の厚味辷り応力 $T_6'(x_1', x_3')$ の分布と振動子表面の変位 $U_1'(x_1',$

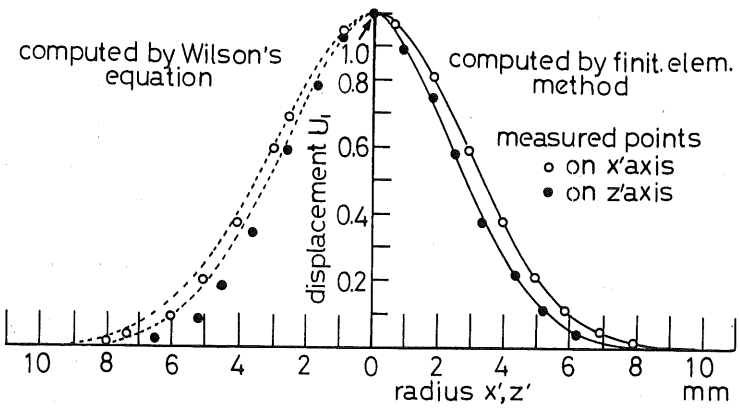

Fig. 13 Comparison between the experimental and the calculated thickness shear displacement in fundamental mode. The measured values are taken from Iijima et al.

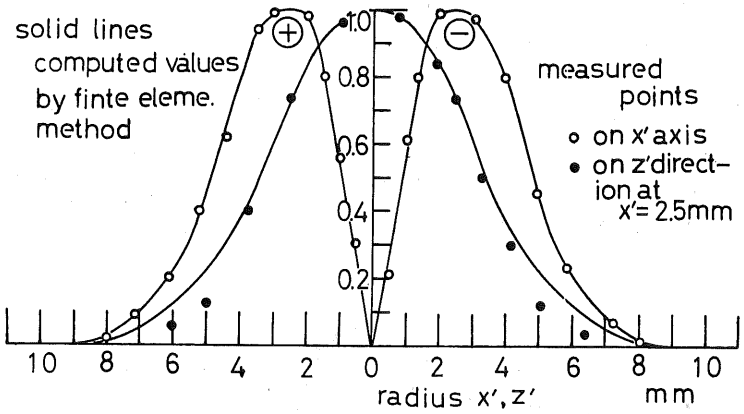

Fig. 14 Comparison between the experimental and the calculated thickness shear displacement in inhrmminc thickness shear mode. The measured values are taken from Iijima et al.

x_3') の分布は，厚味方向 (x_2' or y' 軸方向)で前者は板面を基準にして正弦関数状に分布し，後者は余弦関数状に分布する．従って両者の最大振幅の $x_1'-x_3'$ 面内での分布は相似形になる，故に，(51)式を有限要素法を用いて解いた値は水晶振動子内部での中心層 (i_1', x_3') $x_{2'=h0/2}$ における T_6' の分布とみなすことができる．振動子内部の応力 T_6' は偏光光線走査法[9,10,15]によって実測することができる．実験に用いた資料は Table 1 で共振周波数を測定したものと同一の形状のものを用い，基本振動，3倍振動，5倍振動の周波数で励振し T_6' (x_1', x_3') $x_{2'=const}$ の分布を測定した．

T_6'の測定を行う場合，T_6' に関する応力−光学系数の関係から，光線をx_3' 軸より約 30° 傾けて入射させると最も能率よく T_6' によって光変調を行うことができる[9,10,15,26]．従って，Fig. 15 に示すように，x_3' 軸から 30° 傾むいた方向の円周の一部を切断した資料振動子を作った．切断による共振周波数への影響はインハーモニック・モードにおいて若干みられたが，基本振動，3次倍振動，5次倍振動においてはほとんど影響がみられなかった．

今，x_3' 軸から 30° 傾むいた光線を入射させて，T_6' を測定すると Fig. 15 の振動子の図からも明らかなように，振動の方向が x_1' 軸方向にある応力を x_1'' の方向におきかえてその成分を観測していることに相当する．従って有限要素法による計算も x_1'' 軸上の応力 T_6' におきかえて，実行しなければならない．応力の実測は Fig. 15 の資料に付されている〝5，4，……0，……5〟の各点を $x_2'(y')$ 軸方向に光線を走査して，その最大値を用いた．最大値はどの振動においても $y'=h_0/2$ の中央層にあることは別の研究で明らかである[10]．図中，上記の各点は 1 mm 毎にとってある．

振動体による光変調の理論から光変調に有効な応力は光線が通過している光路長について積分した値 $\int_0^h T_6'(x_1', x_3')dh$ になる[9,15]．従って応力によって光線が変調を受ける量は先記の積分値に比例する．但しこの式で h は水晶中における光線の光路長を示す．Fig. 15 に示してあるように資料水晶は x_1'' 軸に平行に幅 h で円周を切断してあって，切断範囲内では光路長は不変である．又，T_6' は x_1' 軸方向及び x_3' 軸方向にガウス分布しているならば

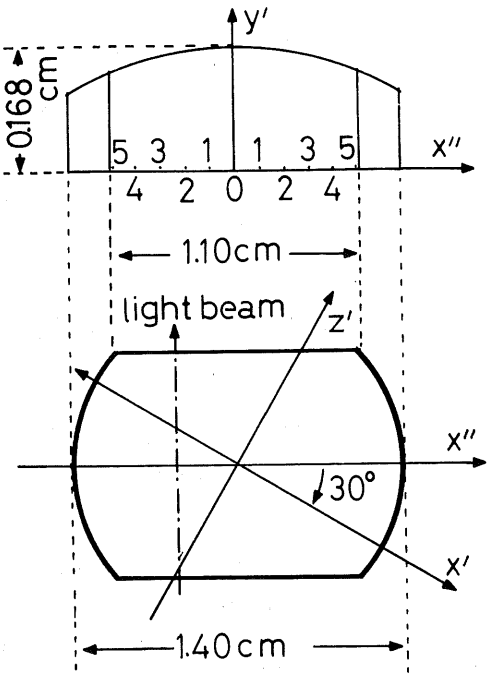

Fig. 15 Plano-convex AT−cut quartz crystal resonator for measurent 9f internal stress distributions. Measurd points are 5, 4……0……,4, 5.

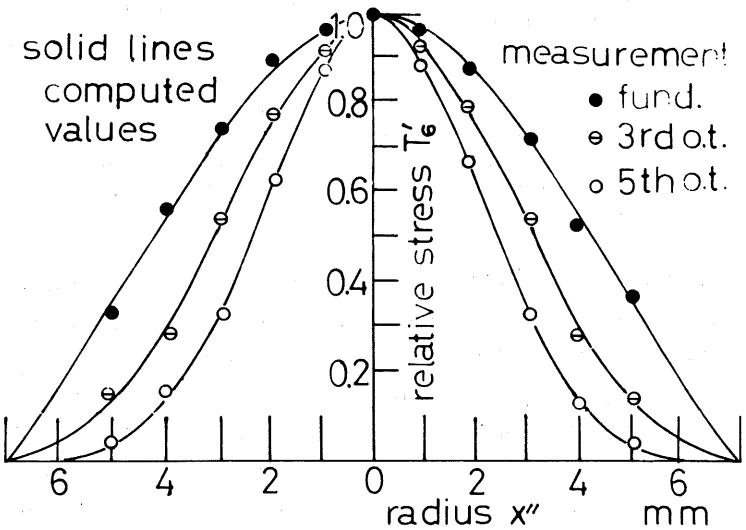

Fig. 16 Comparison between the measured and the calculated thickess shear stress disributions in the fundamental, 3rd overtone, and 5th overtone thickness shear resonant frequencies.

$$\int_0^h T_6'(x_1', x_3')\, dh \propto \tilde{T}_6'(x_1', x_3')\, h \tag{65}$$

とみなすことが可能である．但し $\tilde{T}_6'$ は平均値を意味する．x_1'' (x'') 軸上で $\tilde{T}_6'$ と T_6' の分布は相似とみなし得るので，$\tilde{T}_6'$ を求めれば T_6' の分布の形状が知られる．前述したように各点において光線は x_2' (y') 軸の方向に走査し光変調の最大値をとった．その結果を Fig. 16 に示す．図中，丸印は実測値を示し，実線は計算した値を示す．実測値，計算値ともに最大値が 1 であるように規格化して示してある．双方のよい一致がみられる．

§ 7．電極の影響を考慮した解法

7.1 圧電の基本的検討

前節までの検討においては，電極の影響は一切考慮しなかったが，実際の振動子には一対の蒸着電極が付されている場合が多い，この電極が振動のモードや共振周波数にどのような効果を示すかを本解析法によって分析を加えてみる．

7.2 圧電反作用効果の検討

水晶等の圧電結晶において，電界 E_j，電束密度 D_i，応力 T_m，ひずみ S_n の間には相互に可逆的な関係が存在し，結晶に圧縮又は張力をかけると電荷が生じ，この逆過程として，結晶に電界をかけると結晶が変形を起す．これらの間の基本式は，非磁性結晶，等温変化であると言う条件下で，

$$\begin{aligned} S_n &= s_{nm}^{E\theta}\, T_m + d_{jn}^{\theta}\, E_j \\ D_i &= d_{im}^{\theta}\, T_m + \varepsilon_{ij}^{\theta}\, E_j \\ i, j &= 1\sim 3,\ n, m = 1\sim 6 \end{aligned} \tag{66}$$

となる．上式で S_{nm}^{θ} は弾性 compliance で，d_{im}^{θ} は圧電定数，$\varepsilon_{ij}^{\theta}$ は誘電率である．今，水晶振動子に上式を適用してみる．AT−cut 板の場合，励振用電極は x_2'（添字がまぎらわしい場合 y' とする）面に蒸着する．現在，最も多く利用されている plano-convex AT−cut 水晶振動子においても同様な方式で電極が付されている．plano-convex 板は版面が曲面であるために厳密に言うと平行電界とはならないが取扱い上，平行電界で近似して解析を加える．Fig. 17 に平行平板，convex 面を有する振動子の電極と電界の様子を示しておく．上述したように電界は E_2 のみと考える．電極に電源から電荷が供給されている場合の電束密度は (66) の第 2 式から

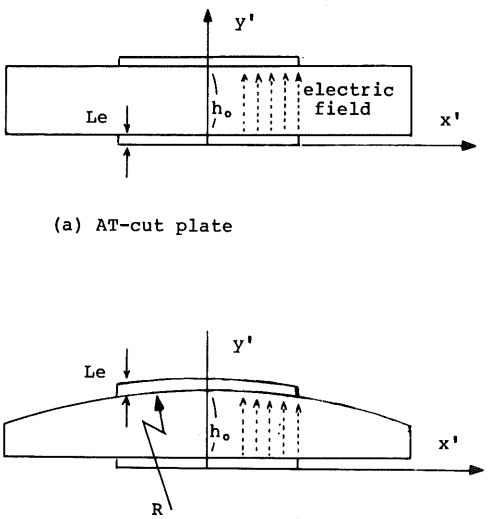

Fig. 17 Two types of AT−cut quartz crystal plate, h and L_e are thickness of plate and thickness of elactrodes, respectively.

$$D_i=\epsilon_{ij}^{\theta}E_j+d_{im}^{\theta}T_m \tag{67}$$

となる．結晶中の音波の波長に比較して，波束の面積の平方根が十分大きい場合には，圧電気的に生じた電荷は結晶内に反電界を作る．本研究で取扱う振動子の場合，厚味に比較して，y' 面が十分に大きな素子であるために反電界（圧電反作用）を考慮しなければならない．水晶は絶縁結晶体であるために

$$E_j^*=-\epsilon_{ij}^*\ d_{im}\quad Tm$$
$$\text{上式で}\epsilon_{ij}^*=1/\epsilon_{ij} \tag{68}$$

で示される反電界を形成する[23,25]，圧電反作用はこの反電界によって生ずる．(68) 式を (66) の第1式に代入して

$$S_n=s_{nm}^E(\boldsymbol{I}-d_{im}\epsilon_{ij}^*d_{im}/s_{nm}^E)T_m \tag{69}$$

を得る．但しIは6行1列で全ての要素が1であるマトリックスである．AT−cut 水晶振動子の厚味辷り振動に伴う主な応力は T_6' であり，ひずみは S_6' である．故に (69) 式は

$$S_6'=s_{66}^E(1-d_{26}^2/\epsilon_{22}\ s_{66}^E)T_6' \tag{70}$$

と書き改められる．上式の物理的意味は反電界を考慮すると弾性定数 s^E が $s_{66}'=(1-d_{26}^2/\epsilon_{22}\ s_{66}^E)$ に置き変った事になる．従って反電界を考慮した場合としない場合の共振周数はわずかに異り，計算においては s_{66}' を用いた方が実測値に近いことは言うまでもない．この事は古賀によって詳細に研究されている[24]．

今，振動子に電極が付けられていて，電極が外部回路によって短落されている場合，電界は $E_2=0$ となり反電界も生じない．従って (70) 式で

$$s_{66}'=s_{66}^E \tag{71}$$

となる．一方電極が付けられていない部分においては，(70) 式がそのまま成立しているはずであるから，水晶振動子は部分的に2種類の弾性係数で形成されていることになる．AT−cut 水晶振動子においては

$$s_{66}^E:\ d_{26}^2/\epsilon_{22}=1:0.0088 \tag{72}$$

であるから compliance 定数 〔s〕 の逆マトリックスである stiffness 定数 〔c〕 は電界を考慮して，純機械的な c_{66} の約 1.0088 倍になるものとして扱うことができる．

7.3 電極の厚味効果の検討

Fig. 17 に示すように蒸着してある電極は振動子と一体となって振動する．従って厚味辷止振動の場合，振動の解析に当っては電極の厚味も十分考慮しておかねばならない．電極金属中と水晶結晶中の音速の比を v_R として，電極の厚味を L_e とすれば，電極が付着している部分の振動の等価的厚味は

$$y_0'=2v_RL_e+h_0 \tag{73}$$

Table 3 音速の比較

材　料	Stiffness定数 (N/m^2)	密度ρ(kg/m^3)	音速$\sqrt{c_{ij}/\rho}$(m/s)
水　晶	$c_{66}=29.25\times10^9$	2.64×10^3	3.33×10^3
銀	$c_{44}=46.1\times10^9$	10.49×10^3	2.07×10^3
金	$c_{44}=42.0\times10^9$	19.32×10^3	1.47×10^3

となる．h_oは振動子の最大厚味である．電極は通常，板の両面的に蒸着されているので係数2を付する．音波は音速の異った材料の間では反射・屈抜を生ずるので単純に（73）式のように置くことは厳密な意味では問題があるが，ここで取扱う近似と比較すると十分その傾向をとらえている．

Table 3に水晶結晶及び，その電極材料として用いられる金，銀の弾性定数，密度，音速を示しておく．例えば水晶に金電極を蒸着してある振動子においては$u_R=2.27$であるから（73）式は

$$y_2'=4.54\,L_e+h_o \tag{74}$$

となって，従って，等価的な厚味は厚くなり，厚味辷り振動の場合，共振周波数は低下する．

7.4 電極質量効果の検討

AT－cut 水晶振動子が厚味辷り振動を行っている場合，無限平板近似での共振角周波数は

$$\omega_0=\frac{m\pi}{h_o}\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}} \tag{75}$$

で与えられる．これは振動変位の方向と位相が同一平面内では一様であると仮定した一次元モデルの解である．定在波は電極の両表面間に半波長の整数倍の関係で乗る，これを周期的に重りついている弦であるとみるならばFig. 18に示すようになる．この振動に対する境界条件は

$$\begin{aligned} &y'=0\text{で} && \partial U/\partial y'=0\\ &y'=2v_RL_e+h_o\text{で} && \partial U/\partial y'=0 \end{aligned} \tag{76}$$

となる．この弦の密度を位置の関数で示せば

$$\left.\begin{aligned} &0<y'<L_e\\ &L_e+h_o<y'<y_o'\end{aligned}\right\}\quad \eta(y)=\eta_1$$
$$L_e<y'<L_e+h_o \qquad \eta(y)=\eta_2 \tag{77}$$
$$\text{where}\quad \eta_1-\eta_2=\eta$$

となる．ηは両者の密度差を示す．一般に電極金属の密度は大きいが，L_eがh_oに対して極めて薄い

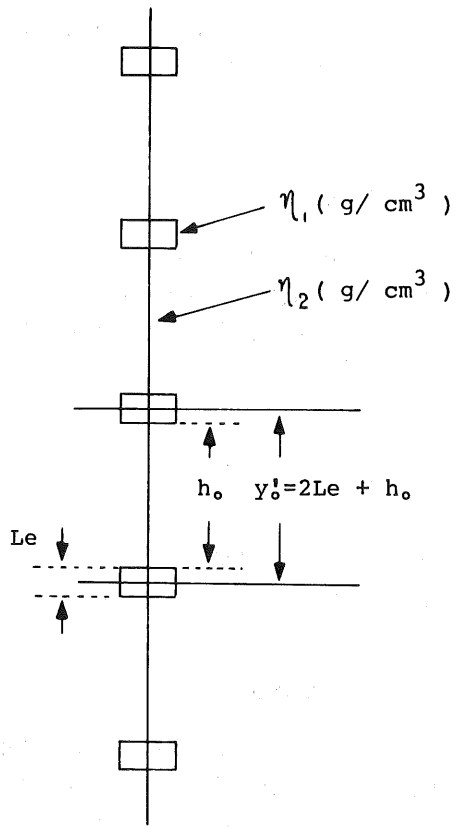

Fig. 18 Figure of additional weight on the chord, periodically.

ために

$$L_e \eta_1 \ll h_0 \eta_2 \tag{78}$$

と置くことができる．但し η_1 は電極金属の密度，η_2 は水晶の密度である．重りのない弦の角周波数と重りのある場合の弦の角周波数の差分を角周波数の2乗の変動分 δw^2 として一次の摂動を用いて計算すると

$$\delta\omega^2 = -\frac{\eta\int_o^{Le}\cos^2(m\pi y'/y_0')dy' - \eta\int_{y_0'-Le}^{y_0'}\cos^2(m\pi y'/y_0')dy'}{\int_0^{y_0'}\cos^2(m\pi y'/y_0')dy'} \tag{79}$$

$$\simeq -2\eta\frac{L_e}{y_0'} = -2\eta\frac{L_e}{h_0}$$

となる．従って，電極のない場合の共振周波数を ω_o とすれば，電極を付着した水晶振動の共振周波数は

$$\omega = \omega_o\sqrt{1-2\eta\frac{L_e}{h_o}} \tag{80}$$

のように表わされる．上式の物理的意味は電極（重り）を付けたことによって共振角周波数が低下したことを示す．これは，質量効果として知られている事柄である．上式は y' 方向の一次近似であるが

$$2\eta\frac{L_e}{h_o} \ll 1 \tag{81}$$

であるために，密度の変動とみることができる．しかし（80）式はこのままの形で振動に対するShrödingerの式(38)に代入するわけにいかない，共振角周波数の変動を電極の付着による水晶振動子の密度の変化分に変換する必要がある．即ち，質量効果による密度の変化分が $o\sim y_o'$ 間に均一に分布したと考える．元来 ρ_o であった水晶の密度が電極の蒸着によって ρ になったものとすれば(75)，（80）式を用いて

$$\rho = \rho_0\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \rho_o\frac{1}{1-2\eta\frac{L_e}{h_o}} \simeq \rho_o\left(1+2\eta\frac{L_e}{h_o}\right) \tag{82}$$

となる，故に質量効果としては上式で示される如く等価的密度の変化とみなし（38）式に用いなければならない．但し，η は無次元定数，比重として扱う．

7.5 総合的検討

前節までにおいて水晶振動子に対する電極の影響を圧電気的反作用による弾性定数の変化，厚味の等価的変化，質量効果による等価的密度の変化の三点から検討した．これらの事柄を表にまとめるとTable 4のような結果になる．これらの値をShrödingerの式（38）に代入して電極の影響を解析する．次に比較のために電極の影響を考慮しない式と考慮した式を並記しておく．

電極を考慮しない場合

Table 4 蒸着電極の影響

事項 / 状態	Stiffness 定数	等価的厚味	等価的密度
電極のある部分	$c_{66}(1+0.0088)$	$y_o'=2v_RL_e+h_o$	$\rho=\rho_o(1+2\eta L_e/h_o)$
電極のない部分	c_{66}	h_o	ρ_o

$$\left(c_{11}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_1'^2}+c_{55}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_3'^2}\right)+\left[\left\{\rho_o\omega^2-c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\right\}-c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\left(\frac{h_0^2}{y_0^2}-1\right)\right]U'=0 \tag{83}$$

電極を考慮した場合

$$\begin{aligned}&\left(c_{11}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_1'^2}+c_{55}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_3'^2}\right)+\left[\left[\rho_o\left\{1+2\eta L_e/h_o\cdot\alpha(x_1',x_3')\right\}\omega^2\right.\right.\\&\quad-c_{66}\left\{1+0.0088\cdot\alpha(x_1',x_3')\right\}\left\{\frac{m\pi}{h_o+2v_RL_e\cdot\alpha(x_1',x_3')}\right\}^2\Bigg]\\&\quad-c_{66}\left\{1+0.0088\cdot\alpha(x_1',x_3')\right\}\left\{\frac{m\pi}{h_o+2v_RL_e\cdot\alpha(x_1',x_3')}\right\}^2\cdot\\&\quad\left.\left[\left\{\frac{h_o+2v_RL_e\cdot\alpha(x_1',x_3')}{y_o+2v_RL_e\cdot\alpha(x_1',x_3')}\right\}^2-1\right]\right]U=0\end{aligned} \tag{84}$$

但し，電極のある部分で　$\alpha(x_1', x_3')=1$

電極のない部分で　$\alpha(x_1', x_3')=0$ (85)

である．(84) 式に $h_o, y_o \gg 2v_RL_e$ を考慮したマクローリン展開による近似式

$$\begin{aligned}&\left(\frac{m\pi}{h_o+2v_RL_e\cdot\alpha}\right)^2\doteqdot\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\left(\frac{4v_RL_e\cdot\alpha}{h_o^2}\right)\\&\left(\frac{h_o+2v_RL_e\cdot\alpha}{y_o+2v_RL_e\cdot\alpha}\right)^2\doteqdot\left(\frac{h_o}{y_o}\right)^2+\left(\frac{4v_RL_eh_o\cdot\alpha}{y_0^2}\right)\end{aligned} \tag{86}$$

と (80) 式を用いて

$$\begin{aligned}c_{11}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1'^2}+c_{55}\frac{\partial^2 U}{\partial x_3'^2}+&\left[\left[\left\{\rho_o\omega^2-c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\right\}-c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\left(\frac{h_o}{y_0^2}-1\right)\right]\right.\\&-\left[c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\frac{4v_RL_e\cdot h_o}{y_0^2}+\frac{4\rho_o\omega_o^2\eta^2L_e^2}{h_o^2}\right.\\&\left.\left.-0.0088c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\left\{\left(\frac{h_o}{y_o}\right)^2-2\right\}\right]\alpha(x_1',x_3')\right]U'=0\end{aligned} \tag{87}$$

となる．この式の最終項の中カッコ〔 〕の中は電極を付着したための補正項であり，このために potential は下り，振動のエネルギーが電極間に集中して来ることが予測される．これは従来実験的に確認をされていた事実と一致する，振動子が平板であるならば $y_o(x_1', x_3')=h_o$ となる，又，球

面近似ができる plano-convex 板の場合は，曲率半径を R として

$$y_0(x_1', x_3')=\sqrt{R^2-(x_1'^2+x_3'^2)}-R+h_o \tag{88}$$

で与えられることは先に述べた[21]．

原理的には（87）式を前章で記述した有限要素法を用いて数値的に解いて固有値と固有ベクトルを求めるのであるが，補正項の ω_0 は無限平板の値で近似して補正項は potential 項の変化のみとみなして数値的に取り扱えば前章の計算手続がそのまま利用できる．無限平枝の角周波数は

$$\omega^2{}_0=\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\frac{c_{66}}{\rho_o} \tag{89}$$

で表わされ，この値を（87）式の補正項に代入する．

§ 8．電極を考慮した解析結果[22]

8.1 矩形 AT−cut 板の解析

（a）計算手続

資料として用いた水晶振動子は x_1', x_3' の寸法が 18, 0.568, 20 mm の矩形板であって，この板は中沢によって電極蒸着の影響が実験的に詳細に調べられている[19]従って有限要素法によって計算した結果と比較検討するのに都合がよい．板上にとった節点と要素の様子を Fig. 19 に示す．資料振動子が平行平板であるために平板の条件 $y_o=h_o$ を（87）に代入して

$$\begin{aligned}\left(c_{11}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_1'^2}+c_{55}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_3'^2}\right)+\Bigg[\left\{\rho_o\omega^2-c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\right\}\\ -\left\{c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\frac{2v_RL_e}{h_o}+2c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\eta\left(\frac{\eta L_e}{h_o}\right)^2\right.\\ \left.+0.0088c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\right\}\alpha(x_1', x_3')\Bigg]U'=0\end{aligned} \tag{90}$$

を得る．但し potential 補正項の第 1 及び 2 項目で係数を 2（半分）にした理由は中沢の実験では振動子の片面にのみ蒸着電極をつけてあるからである．実際の計算では Fig. 19 のモデルで電極内の節点には（56）式のポテンシャル項の f_i, f_j, f_k の値を

$$f=c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\left\{\frac{2v_RL_e}{h_o}+2\left(\frac{\eta L_e}{h_o}\right)^2+0.0088\right\} \tag{91}$$

となり，電極外の部原では f はゼロと置く，その他の計算手続は前節までの方法と全て同一である．

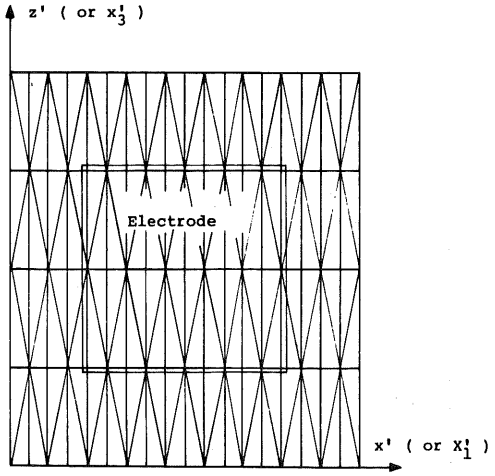

Fig. 19 Diagram showing a 95−node, 144−element system covering a rectangular plate.

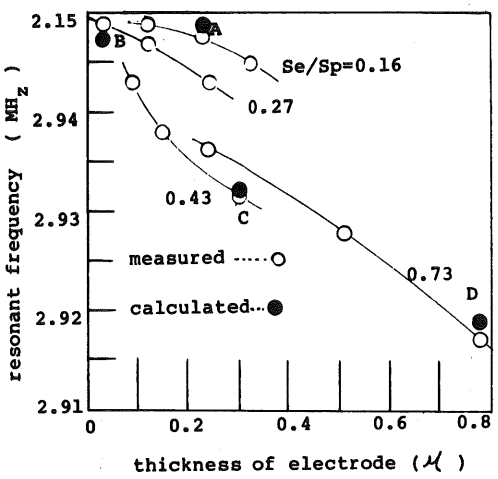

Fig. 20 Relation between the area of excite electrode and the resonant frequency of a rectangular AT−cut quartz plate (x', y', z'=18, 0.568, 20mm). Measured values had been taken by Nakazawa et al.

（b）実測値と計算値の比較

計算結果を実測値とその比較を行うと共振周波数についてはFig. 20のグラフの黒丸で示す通で，両者のよい一致がみられる．変位の分布については周波数の測定に対応するものをFig. 21に示す．図中で *a, b, c, d* はFig. 20の *A, B, C, D* に対応する．主振動に寄生している副振動については計算によって再現することはできなかったが，主振動の振動の様子をよく現している．

（c）矩形板に対する考察

矩形板に蒸着電極を付着した振動子の解析においても本解析方法は有効であることが確認された．比較検討した結果について考察を加える．Fig. 20及びFig. 21の D 又は d で表示されているデータについてみると銀蒸着電極が付けられている，この振動子では

$$h_o=0{,}0568\text{cm},\quad L_e=7.8\times10^{-5}\text{cm}$$
$$v_R=3.33\times10^3/2.07\times10^3=1.59 \qquad (92)$$
$$\eta=10.49-2.64=7.85\quad \text{g/cm}^3$$

であるから（91）式の補正項の第1項目の電極の厚味による補正効果，第2項目の電極の質量によ

$$\frac{2v_RL_e}{h_o}=4.37\times10^{-3}$$
$$2\left(\frac{\eta L_e}{h_o}\right)^2=2.28\times10^{-4} \qquad (93)$$
$$0.0088=8.8\times10^{-3}$$

となる．この実験では上式中の第2項の値が小さい，これは蒸着電極として用いた銀の密度が小さいためであって，質量効果で有効にエネルギー閉じ込めを行うには金電極が有効である．金の電極を用いた場合，音速比 v_R も大きくなるので効果的である．

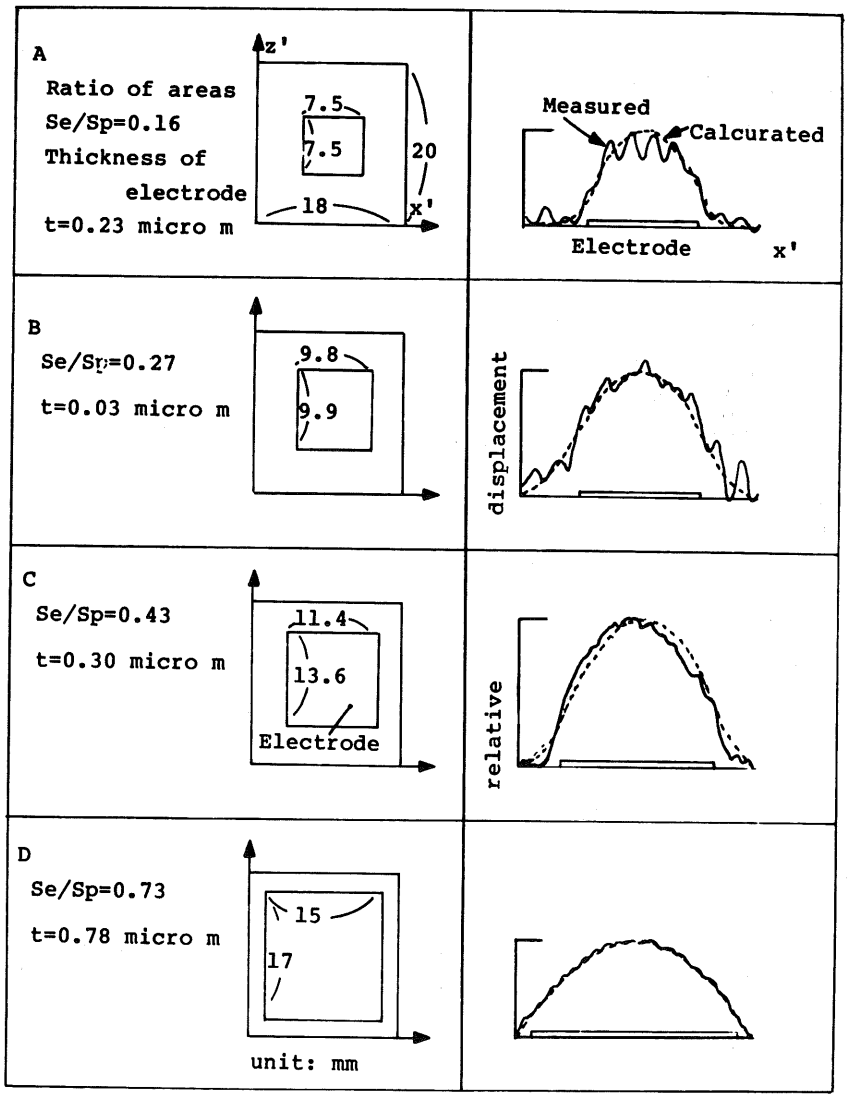

Fig. 21 Comparison between the measured thickness shear displacements and the calculated values. Measuced values taken by Nakazawa et al.

Table 5 円板振動子の共振周波数

振動子の状態	測定周波数	計算周波数	誤差
電極なし	———	4157.1kHz	———
電極半径 7mm	4163.8kHz	4151.3kHz	0.3%
電極半径 4mm	4158.7kHz	4154.5kHz	0.1%
電極半径 7mm ベベル加工	4154.6kHz	4152.5kHz	0.05%

8.2 円形 AT−cut 板の解析

（a）計算手続

直径 22 mm，厚さ 0.4 mm の円形 AT−cut 水晶振動子に 10×10^{-6} cm の金電極を上，下の面に蒸着した振動子資料を作り，本方法による解析結果と実測値との比較検討を行う．要素の取り方は Fig. 11 に示す通り板の 1/4 をとり，自動分割を行った．電極でカバーされている部分の節点のポテンシャル項 f_i, f_j, f_k は

$$f=c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\left\{\frac{4v_RL_e}{h_o}+4\left(\frac{\eta L_e}{h_o}\right)^2+0.0088\right\} \tag{94}$$

のようにおいた．

（b）実測値と計算値の比較

共振周波数における両者の比較を Table 5 に示す．又，変位分布の計算値を Fig. 22 に示す．この資料は，上，下面に電極が蒸着されているので，探針法による変位（電荷）分布の実測はできなかった．従って Fig. 22 には計算結果のみを示す．計算結果から電極の面積を小さくすると振動変位は中心部に集中する．しかし，理想的なエネルギー閉じ込めは実現できず，ベベル等（理想的には convex）の加工による工夫が必要である．Fig. 23 にベベル加工をした同形の振動子の基本厚味辷り振動の変位分布を示す．計算の結果，極めてよいエネルギー閉じ込めがみられる．共振周波数についても，Table 5 の最下列に示すように，ベベル加工のない場合よりも，精度がよい．

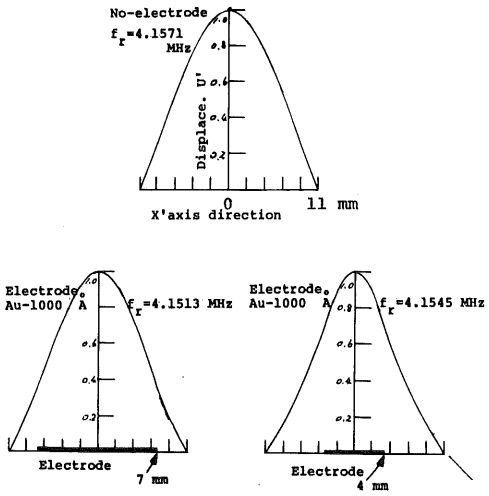

Fig. 22 Relative calculated thickness shear displacements and resonant frequencies of the circular AT−cut quartz crystal resonator.

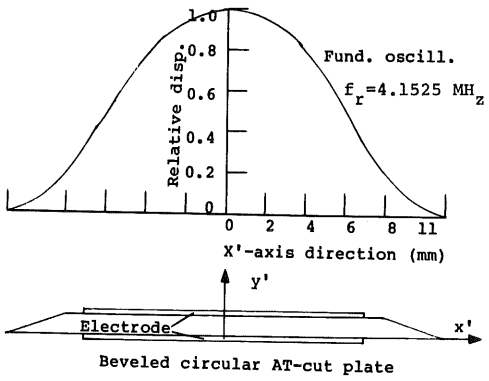

Fig. 23 Calculated thickness shear displacement of the beveled circular AT−cut quartz crystal resonator.

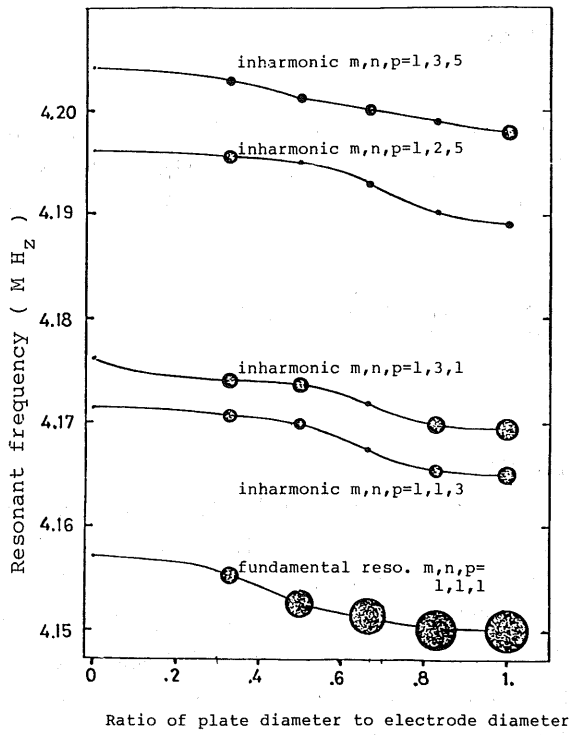

Fig. 24 Relation between the exciting electrode diameter and the resonant frequencies in the circular AT−cut quartz crystal resonator.

（c）円形 AT−cut 板に対する考察

単純な円形板とベベル加工を行った円形板とお比較すると後者の方がよりエネルギー閉じ込めに対して有効であることが確認できる，厚味辷り振動においても端面の処理は極めて重要である．共振周波数についても，ベベル加工のある振動子の方が計算によってより再現し易い即ち，机上での解析によって動行がつかみ易い．

次に電極の半径を種々変えて行くとインハーモニックモードの挙動がみられた．Fig. 24 は横軸に（電極半径/振動子半径）をとり，縦軸に共振周波数をとったものである．丸印の大きさは同一の電界に対する共振の強を示したものである．例えば比の値が 0.65 の場合，基本振動をもっぱら強調することができ，0.35 の場合には基本振動の他に同程度の共振の強さで $(m, n, p) = (1, 1, 3)$，$(1, 3, 1)$，$(1, 2, 5)$ のインハーモニックモードが結合する可能性をもっている[59]．電極の面積によってインハーモニックモードが消滅したり，成長したりする理由はインハーモニックの種類によって，表面電荷の関係から励振が可能であったり，不可能であったりするためである．この関係を合理的に利用すると必要とする共振周波数の近傍のアンウオンテッドモードをおさえ込むことができる[6]．

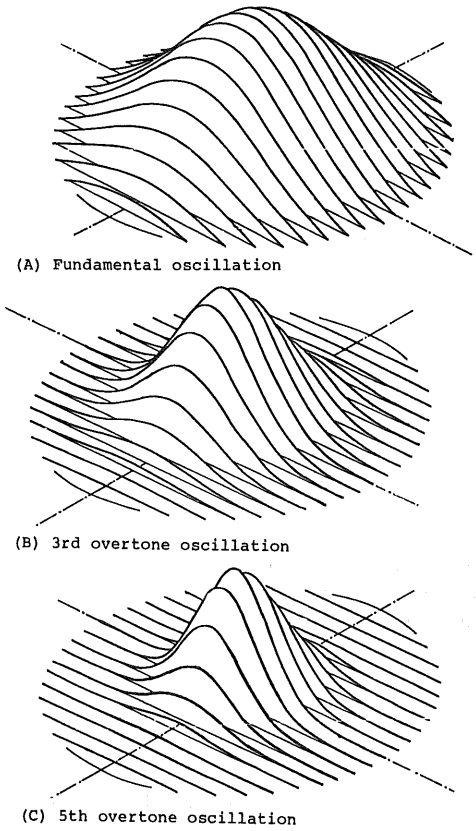

Fig. 25 Calculated displacemnts of plano-convex AT−cut quartz crystal resontor. (A) Fundamental oscillation ; calculated f_r=1.0445M H_z, measured f_r=1.0454M H_z, (B) 3rd overtone oscillation ; calculated f_r=3.0133M H_z, measured f_r=3.0246M H_z and (C) 5th overtone oscillation ; calculated f_r=4.9998M H_z, measured f_r=4.9995M H_{z+}

8.3 plano-convex AT−cut 板の解析

（a）計算手続

plano-convex AT−cut 板資料として，直径 14.0 mm，最大厚味 h_o=1.68 mm，曲率半径 R=95 mm に直径 9.0 mm，膜厚 0.20 μm の金電極を板上，下面に蒸着した振動子を作った．要素の分割は Fig. 11 に示した通りで，(87) 式に (88) 式を代入して計算を行った．

（b）実測値と計算値の比較

振動変位分布の計算値は Fig. 25 の *A, B, C,* のようになる電極の有無の差は同図の線の太さ以下の相違であった．又，応力 T_6' における実測値と計算値の比較は Fig. 16 の電極を考慮せずに解いた場合とほぼ同一になった．共振周波数についても Table 1 とほぼ近い値を得た．

（c）plano-convex 板に対する考察

plano-convex 板の場合，電極蒸着の影響が顕著に現われない事が判明した．この理由は (87) 式の potential に対する補正項を分析してみれば解決できる．同式で曲面を有する事に対する補正項は

$$\delta_{P1}=c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\left(\frac{h_0^2}{y_0^2}-1\right) \tag{95}$$

であり，電極蒸着による補正項は

$$\delta_{P2}=c_{66}\left(\frac{m\pi}{h_o}\right)^2\left[\frac{4vh_oL_e}{y_0^2}+4\left(\frac{\eta L_e}{y_o}\right)^2-0.0088\left(\frac{h_o^2}{y_0^2}-2\right)\right] \tag{96}$$

となる．但し y_o は (88) 式に示す通りである．この両者を相対的な値でグラフに表示してみると Fig. 26 のようになる．後者は前者に比較して 1/10 のオーダーになる．従って，plano-convex AT−cut 水晶振動子では曲面加工によって十分なエネルギー閉じ込めがなされているために，電極の蒸着による諸々の効果はほとんど無視してもよい，言う換えると，この板の解析には convex の要因のみを考慮するだけで十分その持性が解析できる．

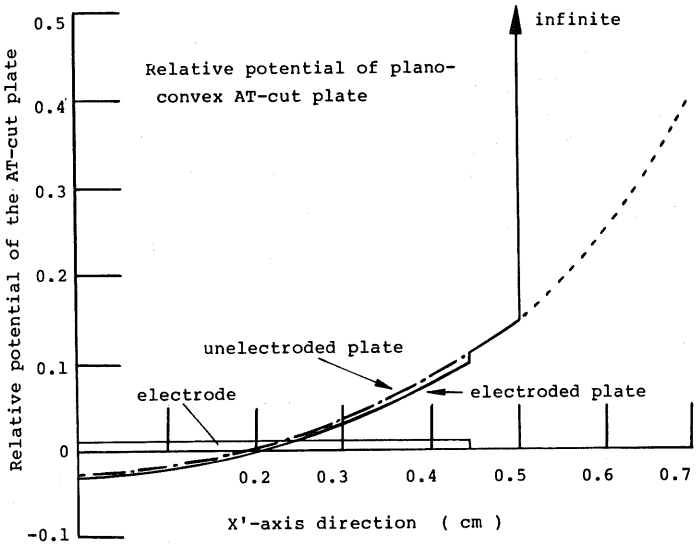

Fig. 26 Relative potential values of the unelectroded plano-convex AT−cut guartj crystal plate, and of the electroded plate.

§ 9. む す び

水晶振動子を無限障壁を有するポテンシャル井戸と仮定して，振動に対するSchrödinger方程式を立てて，可能な限り解析的取扱を行い，最後に物理的意味を考慮しながら有限要素法で解いた．その結果，共振周波数，表面変位の分布，内部応力の分布等が実測値とよい一致を示した．plano-convex板で直径が小さく，厚味が大きいような形状の振動子に対しては過去に報告されている近似解よりも1桁高精度の解析ができた．又，本方法によって，これまであまり理論的な検討が加えられていなかった振動子に対する蒸着電極の影響について解析を加えることができた．一般に蒸着電極は平板振動子に対しては共振周波数，共振モードの双方に顕著な影響を与えるがconvex面を有する振動子に対しては，無視し得る効果である．円形平板振動子においても電極の形状の相違でアンウオンテッドモードの寄生振動はおさえ込むことができるが，エネルギー閉じ込の効果はベベル加工，曲面加工に比較して小さい事が明らかになった．振動エネルギーを板の中央部分に閉じ込めて，端面の悪い影響を少くするためにはやはり，ベベル加工，曲面加工と形状の研究が必須になって来る．

Schrödinger方程式と有限要素法の組合せによるAT−cut水晶振動子に対する新しい解析方法は振動子の設計の有力な手段となる．

謝　　辞

この研究を遂行するに当り北大・工M. C. 奈良慎一氏（現電々公社）の協力を得ました．実験には北大・工・電気回路の装置を使用させていただきました．同講座の深井一郎教授をはじめスタッフ一同に感謝します．計算には北大・大型計算センターを利用しました．

文　献

1) R. D. MINDLIN : "Thickess-shear and flexural vibrations of crystal plates," J. Appl. Phys., 23, 3, pp. 316−333 (1951).
2) I. COGA : "Radio-frequency vibrations of rectangular AT−cut quartz crystal plate," Appl. Phys., 34, 8, pp. 2357−2365 (1963).
3) R. D. MINDLIN : "Thickness-shear and flexural sibrations of circular disk," J. Appl, 25, 10, pp. 1329−1332 (1965).
4) H. FUKUYO et al : "Vibration of circular AT-cut crystal plate," Bulletin of the Tokyo Institute of Technology, No. 55, p. 87 (1963).
5) C. J. WILLSON : "Vibration modes of AT−cut convex quartz Resonatrs," J. Phys. D. Appl. Phys., Vol. 7, pp; 2449−2454 (1974).
6) 奈良，深井，山形：〝プラノコンベックス型水晶振動子の計算機による解析〟，信学技報，US 77，47，pp. 9−16 (1977).
7) 広瀬，秋山，都築，飯島：〝レーザ干渉計による AT（R_1）板水晶振動子の振動変位の測定〟，信学技報，US 75−4，pp. 5←12 (1975).
8) K. IIJIMA et al : "Laser interferometric measurement of the vibration displacement of a plano-convex AT−cut quartz crystal resonator", Proc. IEEE, 46, 3, p. 386 (1975).
9) 山形，深井，安田：〝レーザ光線の変調による AT−cut 水晶振動子の応力分布測定〟，信学会誌，60−A，12，pp. 1122−1129 (1977).
10) S. YA1AGATA et al : "Thickness-shear stress distributions of the oscillating plano-convex AT−cut quartz crystal resonator", Electro. Letters IEE, 14, 14, pp. 450−451 (1978).
11) 奈良慎一：〝Plano-convex AT−cut 水晶振動子の振動理論〟，昭 52 北大・工・修委論文
12) E. シュポルスキー：〝原子物理学工〟，玉木英彦他訳，東京図書 (1971).
13) 長谷川節：〝変分学の応用〟，森北出版 (1976).
14) 戸川隼人：〝FORTRAN による有限要素法入門〟，サイエンス社 (1977).
15) S. YAMAGATA : "Analysis of vibrations in AT−cut quartz plate using a light modulated oscillator", IEEE Trans. Sonic and Ulatrason., 25, 4, pp. 192−198 (1978).
16) H. FUKUYO : "Vibration of biconvex circulas AT−cut plate", Bulletin of Tokyo Institute of Technology, No. 72, pp. 1−15 (1966).
17) 尾上，岡田：〝曲率のある厚味すべり振動子の解析〟，信学会起音波研究会資料 US 67−22 (1968−2).
18) 八鍬，奥田，白井，赤井：〝有限要素法による水晶振動子の振動解析〟，電気学会エレクトロ・メカニカル機能部品専門委員会 No. 31−70 (昭 49. 1).
19) 中沢，涌井：〝AT 板水晶振動子の電極効果〟，信学技報，77，23，pp. 13−18 (1977).
20) W. G. CADY : "Piezoelectricity", Vol. 1, New Revised Edition, pp. 104−115, Dover Pub. INC., New York.
21) 山形，奈良，深井，安田：〝Plano-convex AT−cut 水晶振動子の Schrodinger 方程式による振動解析〟，信学会誌，J 62−A，7，pp. 436−443 (1979).
22) 山形，他：〝AT−cut 振動子に対する蒸着電極の影響〟，信学会誌，に投稿中.
23) 小川智哉：〝結晶物理工学〟，裳華房 pp. 174−176 (1976).
24) I. KOGA, M. ARUGA and Y. VOSHINAKA : "Theory of plane elastic waves in a piezoelectric crystalline medium and determination of elastic and piezoelectric constant of quartz", Phys. Rev., 109, 5 pp. 1467−1473 (1958).
25) T. OGAWA : "Eccect of depolarization field on electro mechanical praperties of piezoelectric semiconductors (theory)", Japan J. Appl. Phys., 8, 2. pp. 227−235 (1968).
26) 山形積治：〝光弾性効果による光線の変調とその応用研究第 4 報〟，北教大紀要 2−1，29，2，pp. 19−33 (1979).
27) S. YAMAGATA et al : "Measurement of thickness-shear stress distribution of the oscillating plano-convex AT−cut quartz crystal resonator", IEE J. of Microwave, Optics and Acoustics, 3, 6, pp. 256−271 (1979).