ヴエクトル量のLinear Mean Regression と Partial Correlation について

ヴエクトル量の Linear Mean Regression と Partial Correlation について

宇 喜 多 義 昌

北海道学芸大学札幌分校

Yoshimasa UKITA : On the Vector Linear Mean Regression and the Partial Correlation

§ 1. Summary and Introduction.

1954年12月の大阪統計談話会に於て小川潤次郎博士は、増山元三郎博士の Correlation を簡潔にして、その本質を明らかにし、その Correlation Coefficient の Sample Distribution の assymptatical な場合について論ぜられた。即ち、

$\boldsymbol{u}_1$, $\{\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \cdots\cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ は夫々 non-singular な p, $\{p\cdots\cdots,p\}$ 次元正規分布に従うヴエクトル変量とし、$\boldsymbol{u}_\alpha (\alpha=2,\cdots\cdots,m)$ は互に独立であるとすると、$\boldsymbol{u}_1$ の $\boldsymbol{u}_2$ に対する回帰 tensor とし

$$E(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}'_2)\cdot E(\boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}'_2)^{-1}$$

を定義し、

次に $\rho^2(\boldsymbol{u}_1;\boldsymbol{u}_2)$ として、$\boldsymbol{u}_1$ の $\boldsymbol{u}_2$ に対する回帰 tensor と $\boldsymbol{u}_2$ の $\boldsymbol{u}_1$ に対する回帰 tensor の積の Spur の $\dfrac{1}{p}$ が増山氏の Correlation の定義であることを説明し、これに対する統計量として、母平均 E-operetor の代りに

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(u_{u\nu}-\bar{u}_u)(u_{v\nu}-\bar{u}_v)\right]=[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}'_2] \qquad \left[\begin{array}{l}\text{但し、} u_{u\nu} \text{は} \boldsymbol{u}_1 \text{の第} u \text{成分の} n \text{ヶの観測値}\\ \qquad u_{v\nu} \text{は} \boldsymbol{u}_2 \text{の第} v \text{成分の} n \text{ヶの観測値}\end{array}\right]$$

を用いて、

$$r^2(\boldsymbol{u}_1;\ \boldsymbol{u}_2)=\frac{1}{p}Sp\{[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}'_2]\ [\boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}'_2]^{-1}\cdot[\boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}'_1]\ [\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}'_1]^{-1}\}$$

として定義すると、これ即ち

$$\rho^2(\boldsymbol{u}_1;\ \boldsymbol{u}_2)=\frac{1}{p}(\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots\cdots+\rho_p^2)$$

$$r^2(\boldsymbol{u}_1;\ \boldsymbol{u}_2)=\frac{1}{p}(r_1^2+r_2^2+\cdots\cdots+r_p^2)$$

なることを明らかにしました。

私は $\{\boldsymbol{u}_\alpha\}$ の独立の条件を落して、一般的立場から linear mean square regression を論じ、Regression Coefficient Matrix, Residuals, Partial Correlation を論じて見ました

小川博士の論文に従つて、

$$\boldsymbol{x}_\alpha=[E(\boldsymbol{u}_\alpha\ \boldsymbol{u}'_\alpha)]^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}_\alpha$$

として、$\boldsymbol{u}_\alpha$ を normalize して置くが、独立条件の攸除から

$$E(\boldsymbol{x}_\alpha \boldsymbol{x}'_\beta)=\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{I} \qquad (\text{但し } \boldsymbol{I} \text{ は } p\times p \text{ の Unite Matrix})$$

は使えず

$$E(\boldsymbol{x}_\alpha \boldsymbol{x}'_\beta)=\underset{\alpha\beta}{\boldsymbol{\lambda}} \qquad (\text{但し } \underset{\alpha\beta}{\boldsymbol{\lambda}} \text{ は } p\times p \text{ の Symmetric Matrix})$$

として話しを進める。

§ 2. Regression Coefficient Matrix について

Partial Regression の場合と同じ手続をとつて、

G_α ; $p\times p$ $\alpha=2,\cdots\cdots,m$ なる symmetric matrix とする。さて次の如く S を定義する。

$$S=\sum_{\alpha=2}^{m}\underset{\alpha}{G}\,\boldsymbol{x}_\alpha.$$

次に係数行列 G_α を $E[(x_1-S)'(x_1-S)]$ を minimize するように決めて、その行列を $\underset{1\alpha}{G}$ とする。そのために、

$$\begin{aligned}
J &\equiv E[(\boldsymbol{x}_1-S)'(\boldsymbol{x}_1-S)]\\
&=E[Sp(\boldsymbol{x}_1-S)(\boldsymbol{x}_1-S)']\\
&=Sp\{E(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1')-\sum_{\alpha=2}^{m}E(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_\alpha')\underset{\alpha}{G'}-\sum_{\alpha=2}^{m}\underset{\alpha}{G}E(\boldsymbol{x}_\alpha\boldsymbol{x}_1')+\sum\underset{\alpha}{G}E(\boldsymbol{x}_\alpha\boldsymbol{x}_\beta')\underset{\beta}{G'}\}\\
&=Sp\{\underset{11}{\boldsymbol{\lambda}}-\sum_{\alpha=2}^{m}\underset{1\alpha}{\boldsymbol{\lambda}}\underset{\alpha}{G'}-\sum_{\alpha=2}^{m}\underset{\alpha}{G}\underset{1\alpha}{\boldsymbol{\lambda}}+\sum_{\alpha,\beta=2}^{m}\underset{\alpha}{G}\underset{\alpha\beta}{\boldsymbol{\lambda}}\underset{\beta}{G'}\}\\
&=\sum_{\nu=1}^{p}(\underset{11}{\lambda_{\nu\nu}}-\sum_{\alpha=2}^{m}\sum_{k=1}^{p}\underset{1\alpha}{\lambda_{\nu k}}\underset{1\alpha}{g_{k\nu}}-\sum_{\alpha=2}^{m}\sum_{k=1}^{p}\underset{1\alpha}{g_{\nu k}}\underset{1\alpha}{\lambda_{k\nu}}+\sum_{\alpha,\beta=2}^{m}\sum_{k,l=1}^{p}\underset{1\alpha}{g_{\nu k}}\underset{\alpha\beta}{\lambda_{kl}}\underset{1\beta}{g_{\nu l}})\\
&=\sum_{\nu=1}^{p}(\underset{11}{\lambda_{\nu\nu}}-2\sum_{\alpha=2}^{m}\sum_{k=1}^{p}\underset{1\alpha}{\lambda_{\nu k}}\underset{1\alpha}{g_{k\nu}}+\sum_{\alpha,\beta=2}^{m}\sum_{k,l=1}^{p}\underset{1\alpha}{g_{\nu k}}\underset{\alpha\beta}{\lambda_{kl}}\underset{1\beta}{g_{\nu l}})
\end{aligned}$$

この J を minimize する $\underset{1\alpha}{g_{ij}}$ を決定するために、

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial \underset{1\alpha}{g_{1j}}}=0,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial \underset{1\alpha}{g_{2j}}}=0,\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial \underset{1\alpha}{g_{mj}}}=0$$

よりして、

$$\sum_{\alpha=2}^{m}\sum_{l=1}^{p}\underset{1\alpha}{g_{1l}}\underset{\beta\alpha}{\lambda_{jl}}=\underset{1\beta}{\lambda_{j1}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.\ 1)$$

$$\sum_{\alpha=2}^{m}\sum_{l=1}^{p}\underset{1\alpha}{g_{2l}}\underset{\beta\alpha}{\lambda_{jl}}=\underset{1\beta}{\lambda_{j2}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.\ 2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{\alpha=2}^{m}\sum_{l=1}^{p}\underset{1\alpha}{g_{pl}}\underset{\alpha\beta}{\lambda_{jl}}=\underset{1\beta}{\lambda_{jp}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.\ p)$$

然るに (1. 1) より

$$\sum_{l=1}^{p}\underset{12}{g_{1l}}\underset{22}{\lambda_{jl}}+\sum_{l=1}^{p}\underset{13}{g_{1l}}\underset{23}{\lambda_{jl}}+\cdots\cdots+\sum_{l=1}^{p}\underset{1m}{g_{1l}}\underset{2m}{\lambda_{jl}}=\underset{12}{\lambda_{j1}} \qquad (j=1,\ 2,\cdots\cdots p)$$

$$\sum_{l=1}^{p}\underset{12}{g_{1l}}\underset{32}{\lambda_{jl}}+\sum_{l=1}^{p}\underset{13}{g_{1l}}\underset{33}{\lambda_{jl}}+\cdots\cdots+\sum_{l=1}^{p}\underset{1m}{g_{1l}}\underset{3m}{\lambda_{jl}}=\underset{13}{\lambda_{j1}} \qquad (\ \ 〃 \qquad 〃\ \ )$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{l=1}^{p} \underset{12}{g_{1l}}\,\underset{m2}{\lambda_{jl}} + \sum_{l=1}^{p} \underset{13}{g_{1l}}\,\underset{m3}{\lambda_{jl}} + \cdots\cdots + \sum_{l=1}^{p} \underset{1m}{g_{1l}}\,\underset{mm}{\lambda_{jl}} = \underset{1m}{\lambda_{j1}} \qquad (\quad〃 \qquad 〃 \quad)$$

この $p(m-1)$ ケの式より $p(m-1)$ ケの $\underset{12}{g_{1l}}, \underset{13}{g_{1l}}, \cdots\cdots, \underset{1m}{g_{1l}}$ $(l=1,\ 2, \cdots\cdots, p)$ を求めることが出来る。その結果は今 $\underset{\mathbf{1i}}{\Lambda}$ を次の如く定義して、

$$\underset{\mathbf{1i}}{\Lambda} \equiv \left| \begin{array}{cccccccc} \underset{11}{\lambda_{ii}} & \underset{12}{\lambda_{1i}} & \underset{12}{\lambda_{2i}} \cdots\cdots \underset{12}{\lambda_{pi}} & \underset{13}{\lambda_{1i}} \cdots\cdots \underset{13}{\lambda_{pi}} \cdots\cdots \underset{1m}{\lambda_{1i}} \cdots\cdots \underset{1m}{\lambda_{pi}} \\ \underset{12}{\lambda_{1i}} & \underset{22}{\boldsymbol{\lambda}} & & \underset{23}{\boldsymbol{\lambda}} \cdots\cdots\cdots\cdots \underset{2m}{\boldsymbol{\lambda}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \underset{1m}{\lambda_{1i}} & & & \\ \vdots & \underset{m2}{\boldsymbol{\lambda}} & & \underset{m3}{\boldsymbol{\lambda}} \cdots\cdots\cdots\cdots \underset{mm}{\boldsymbol{\lambda}} \\ \underset{1m}{\lambda_{pi}} & & & \end{array} \right|$$

$(i=1,\ 2, \cdots\cdots, p)$

とおき、

$\underset{\mathbf{1i}}{\Lambda}$ の $\underset{1k}{\lambda_{1l+1}}$ の余因子を $\underset{\mathbf{1i}}{\Lambda_{1\ l+1+(k-2)p}}$ とかくと

$$\underset{12}{g_{1l}} = -\frac{\underset{\mathbf{11}}{\Lambda_{1\ l+1}}}{\underset{\mathbf{11}}{\Lambda_{11}}}, \quad \underset{13}{g_{1l}} = -\frac{\underset{\mathbf{11}}{\Lambda_{1\ l+1+p}}}{\underset{\mathbf{11}}{\Lambda_{11}}}, \cdots\cdots, \underset{1m}{g_{1l}} = -\frac{\underset{\mathbf{11}}{\Lambda_{1\ l+1+(m-2)p}}}{\underset{\mathbf{11}}{\Lambda_{11}}}.$$

$(1.\ 2)\cdots\cdots(1.\ p)$ より同様にして、

$$\underset{12}{g_{il}} = -\frac{\underset{\mathbf{1i}}{\Lambda_{1\ l+1}}}{\underset{\mathbf{1i}}{\Lambda_{11}}}, \quad \underset{13}{g_{il}} = -\frac{\underset{\mathbf{1i}}{\Lambda_{1\ l+1+p}}}{\underset{\mathbf{1i}}{\Lambda_{11}}}, \cdots\cdots, \underset{1m}{g_{il}} = -\frac{\underset{\mathbf{1i}}{\Lambda_{1\ l+1+(m-2)p}}}{\underset{\mathbf{1i}}{\Lambda_{11}}}$$

$(i=1,\ 2, \cdots\cdots, m).$

を得るから、$\underset{1\alpha}{G}$ は次の如く求めることが出来る。それを $\underset{1\alpha}{\hat{G}}$ とかくことにすると、

$$\underset{1\alpha}{\hat{G}} = \begin{pmatrix} \underset{1\alpha}{g_{11}} \cdots\cdots\cdots \underset{1\alpha}{g_{1p}} \\ \underset{1\alpha}{g_{21}} \cdots\cdots\cdots \underset{1\alpha}{g_{2p}} \\ \vdots \\ \underset{1\alpha}{g_{m1}} \cdots\cdots\cdots \underset{1\alpha}{g_{mp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\underset{\mathbf{11}}{\Lambda_{1\ 1+1+(\alpha-2)p}}}{\underset{\mathbf{11}}{\Lambda_{11}}}, & \cdots\cdots\cdots -\dfrac{\underset{\mathbf{11}}{\Lambda_{1\ p+1+(\alpha-2)p}}}{\underset{\mathbf{11}}{\Lambda_{11}}} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\dfrac{\underset{\mathbf{1p}}{\Lambda_{1\ 1+1+(\alpha-2)p}}}{\underset{\mathbf{1p}}{\Lambda_{11}}}, & \cdots\cdots\cdots -\dfrac{\underset{\mathbf{1p}}{\Lambda_{1p+1+(\alpha-2)p}}}{\underset{\mathbf{1p}}{\Lambda_{11}}} \end{pmatrix}$$

特に $\boldsymbol{x}_2$ の係数 Matrix $\underset{12}{\hat{G}}$ を示せば、

$$\underset{12}{\hat{G}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\underset{11}{\Lambda_{12}}}{\underset{11}{\Lambda_{11}}} & -\dfrac{\underset{11}{\Lambda_{13}}}{\underset{11}{\Lambda_{11}}} & \cdots\cdots\cdots & -\dfrac{\underset{11}{\Lambda_{1\ p+1}}}{\underset{11}{\Lambda_{11}}} \\ -\dfrac{\underset{12}{\Lambda_{12}}}{\underset{12}{\Lambda_{11}}} & -\dfrac{\underset{12}{\Lambda_{13}}}{\underset{12}{\Lambda_{11}}} & \cdots\cdots\cdots & -\dfrac{\underset{12}{\Lambda_{1\ p+1}}}{\underset{12}{\Lambda_{11}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{\underset{1p}{\Lambda_{12}}}{\underset{1p}{\Lambda_{11}}} & -\dfrac{\underset{1p}{\Lambda_{13}}}{\underset{1p}{\Lambda_{11}}} & & -\dfrac{\underset{1p}{\Lambda_{1\ p+1}}}{\underset{1p}{\Lambda_{11}}} \end{pmatrix}$$

そこで、今求めた $\underset{1\alpha}{\hat{G}}$ を使つて、

$$S = \sum_{\alpha=2}^{m} \underset{1\alpha}{\hat{G}}\, \boldsymbol{x}_\alpha = \sum \hat{G}_\alpha \left[E(\boldsymbol{u}_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha')\right]^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{u}_\alpha$$

をうるが、$\boldsymbol{u}_1$ の $\boldsymbol{u}_\alpha$ に対する回帰 tensor は

$$\underset{1\alpha}{\hat{G}} \left[E(\boldsymbol{u}_\alpha\ \boldsymbol{u}_\alpha')\right]^{-\frac{1}{2}}$$

である。以下の議論は小川博士の論文と同じであるから省略する。

§ 3. Residuals.

Residuals を計算して見よう。今、

$$\underset{1m}{h_{il}} \equiv -\underset{1m}{g_{il}}$$

とおくならば

$$\hat{J}_1 = \Big(\underset{11}{\lambda_{11}} + 2\sum_{\alpha=2}^{m} \sum_{k=1}^{p} \underset{1\alpha}{h_{1k}}\, \underset{1\alpha}{\lambda_{k1}} + \sum_{\alpha,\beta=2}^{m} \sum_{l,k=1}^{p} \underset{1\alpha}{h_{1k}}\, \underset{1\beta}{h_{1l}}\, \underset{\alpha\beta}{\lambda_{kl}}\Big) + \cdots\cdots +$$

$$\Big(\underset{11}{\lambda_{pp}} + \sum_{\alpha}\sum_{k} \underset{1\alpha}{h_{pk}}\, \underset{1\alpha}{\lambda_{kp}} + \sum_{\alpha,\beta}\sum_{kl} \underset{1\alpha}{h_{pk}}\, \underset{1\beta}{h_{pl}}\, \underset{\alpha\beta}{\lambda_{kl}}\Big)$$

$$= \Big(\underset{11}{\lambda_{11}} + 2\sum_{\alpha=2}^{m}\sum_{k=1}^{p} \frac{\underset{11}{\Lambda_{1\ k+1+(\alpha-2)p}}}{\underset{11}{\Lambda_{11}}} \underset{1\alpha}{\lambda_{k1}} + \sum_{\alpha,\beta=2}^{m}\sum_{k,l=1}^{p} \cdot \frac{\underset{11}{\Lambda_{1\ k+1+(\alpha-2)p}}\ \underset{11}{\Lambda_{1\ l+1+(\beta-2)p}}}{(\underset{11}{\Lambda_{11}})^2} \underset{\alpha\beta}{\lambda_{kl}}\Big)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \Big(\underset{11}{\lambda_{pp}} + 2\sum_{\alpha=2}^{m}\sum_{k=1}^{p} \frac{\underset{1p}{\Lambda_{1\ k+1+(\alpha-2)p}}}{\underset{1p}{\Lambda_{11}}} \underset{1\alpha}{\lambda_{kp}} + \sum_{\alpha,\beta}\sum_{k,l} \cdot \frac{\underset{1p}{\Lambda_{1\ k+1+(\alpha-2)p}}\ \underset{1p}{\Lambda_{1\ l+1+(\beta-2)p}}}{(\underset{1p}{\Lambda_{11}})^2} \underset{\alpha\beta}{\lambda_{pl}}\Big)$$

然るに、容易に分るように、

$$\sum_{\alpha=2}^{m}\sum_{l=1}^{p} \underset{1i}{\Lambda_{1\ l+1+(\alpha-2)p}}\, \underset{1\alpha}{\lambda_{l1}} + \underset{11}{\lambda_{ii}}\, \underset{1i}{\Lambda_{11}} = \underset{1i}{\Lambda}$$

$$\sum_{\beta=2}^{m}\sum_{l=1}^{p} \underset{1i}{\Lambda_{1\ l+1+(\beta-2)p}}\, \underset{\alpha\beta}{\lambda_{kl}} + \underset{1\alpha}{\lambda_{ki}}\, \underset{1i}{\Lambda_{11}} = 0 \qquad (k=1,\ 2,\cdots\cdots,m).$$

であるから $\hat{J}_1$ の第一項は、次の如くなる。

$$\underset{11}{\lambda_{11}} + 2\frac{(\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda} - \underset{11}{\lambda_{11}}\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda_{11}})}{\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda_{11}}} + \frac{\sum_{\alpha=2}^{m}\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda_{1\,k+1+(\alpha-2)p}}(-\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda_{11}}\underset{1\alpha}{\lambda_{k1}})}{\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda_{11}}\,\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda_{11}}}$$

$$= \underset{11}{\lambda_{11}} + 2\frac{\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda}}{\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda_{11}}} - 2\underset{11}{\lambda_{11}} + \frac{\underset{11}{\lambda_{11}}\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda_{11}} - \underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda}}{\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda_{11}}}$$

$$= \frac{\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda}}{\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda_{11}}}$$

他も同様にして求められるから、

$$\hat{J}_1 = \frac{\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda}}{\underset{\boldsymbol{11}}{\Lambda_{11}}} + \frac{\underset{\boldsymbol{12}}{\Lambda}}{\underset{\boldsymbol{12}}{\Lambda_{11}}} + \cdots\cdots + \frac{\underset{\boldsymbol{1p}}{\Lambda}}{\underset{\boldsymbol{1p}}{\Lambda_{11}}} \equiv E(\eta'_{1,2\cdots n}\eta_{1,2\cdots n})$$

を得る。

同様にして、

$E(\boldsymbol{x}_2 - \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq 2}}^{m} \underset{2\alpha}{G}\,\underset{\alpha}{\boldsymbol{x}})'\ (\boldsymbol{x}_2 - \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq 2}}^{m} \underset{2\alpha}{G}\,\boldsymbol{x}_\alpha)$ を minimize する $p\times p$ matrix $\underset{2\alpha}{G}$ と $\underset{2}{\hat{J}}$ を求めると、

$$\underset{21}{g_{1l}} = -\frac{\underset{\boldsymbol{21}}{\Lambda_{1\,l+1}}}{\underset{\boldsymbol{21}}{\Lambda_{11}}} \equiv -\underset{21}{h_{1l}},\quad \underset{23}{g_{1l}} = -\frac{\underset{\boldsymbol{21}}{\Lambda_{1\,l+1+p}}}{\underset{\boldsymbol{21}}{\Lambda_{11}}} \equiv -\underset{23}{h_{1l}},\ \cdots\cdots \underset{2m}{g_{1l}} = -\frac{\underset{\boldsymbol{21}}{\Lambda_{1\,l+1+(m-2)p}}}{\underset{\boldsymbol{21}}{\Lambda_{11}}} \equiv -\underset{2m}{h_{1l}}.$$

但しこゝに

$$\underset{\boldsymbol{21}}{\Lambda_{11}} = \begin{vmatrix} \underset{22}{\lambda_{11}} & \underset{21}{\lambda_{11}}\cdots\cdots\underset{21}{\lambda_{p1}} & \underset{23}{\lambda_{11}}\cdots\cdots\underset{23}{\lambda_{p1}}\cdots\cdots & \underset{2m}{\lambda_{11}}\cdots\cdots\underset{2m}{\lambda_{p1}} \\ \underset{21}{\lambda_{11}} & & & \\ \vdots & \underset{11}{\boldsymbol{\lambda}} & \underset{13}{\boldsymbol{\lambda}}\cdots\cdots\cdots\cdots & \underset{1m}{\boldsymbol{\lambda}} \\ \underset{21}{\lambda_{p1}} & & & \\ \underset{23}{\lambda_{11}} & & & \\ \vdots & \underset{31}{\boldsymbol{\lambda}} & \underset{33}{\boldsymbol{\lambda}}\cdots\cdots\cdots\cdots & \underset{3m}{\boldsymbol{\lambda}} \\ \underset{23}{\lambda_{p1}} & & & \\ \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \underset{2m}{\lambda_{11}} & & & \\ \vdots & \underset{m1}{\boldsymbol{\lambda}} & \underset{m2}{\boldsymbol{\lambda}}\cdots\cdots\cdots\cdots & \underset{mm}{\boldsymbol{\lambda}} \\ \underset{2m}{\lambda_{p1}} & & & \end{vmatrix}$$

一般に、

$$\underset{21}{g_{il}} = \frac{-\underset{\boldsymbol{2i}}{\Lambda_{1\,l+1}}}{\underset{\boldsymbol{2i}}{\Lambda}} \equiv -\underset{21}{h_{il}},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \underset{2m}{g_{il}} = -\frac{\underset{\boldsymbol{2i}}{\Lambda_{1\,l+1+(m-2)p}}}{\underset{\boldsymbol{2i}}{\Lambda}} \equiv -\underset{2m}{h_{il}}$$

であり、こゝに

$$
\underset{2i}{\Lambda} = \left|\begin{array}{llllll}
\underset{22}{\lambda_{ii}} & \underset{21}{\lambda_{1i}} & \underset{21}{\lambda_{2i}}\cdots\underset{21}{\lambda_{pi}} & \underset{23}{\lambda_{1i}}\cdots\underset{23}{\lambda_{pi}} & \cdots\cdots\cdots & \underset{2m}{\lambda_{1i}}\cdots\underset{2m}{\lambda_{pi}} \\
\underset{21}{\lambda_{1i}} & & & & & \\
\vdots & & \underset{11}{\boldsymbol{\lambda}} & \underset{13}{\boldsymbol{\lambda}} & \cdots\cdots\cdots & \underset{1m}{\boldsymbol{\lambda}} \\
\underset{21}{\lambda_{pi}} & & & & & \\
\underset{23}{\lambda_{1i}} & & & & & \\
\vdots & & \underset{31}{\boldsymbol{\lambda}} & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \underset{3m}{\boldsymbol{\lambda}} \\
\underset{23}{\lambda_{pi}} & & & & & \\
\vdots & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
\underset{2m}{\lambda_{1i}} & & & & & \\
\vdots & & \underset{m1}{\boldsymbol{\lambda}} & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \underset{mm}{\boldsymbol{\lambda}} \\
\underset{2m}{\lambda_{pi}} & & & & &
\end{array}\right|
$$

にして

$$
\hat{J}_2 = \frac{\underset{21}{\Lambda}}{\underset{21}{\Lambda_{11}}} + \frac{\underset{22}{\Lambda}}{\underset{22}{\Lambda_{11}}} + \cdots\cdots + \frac{\underset{2p}{\Lambda}}{\underset{2p}{\Lambda_{11}}} \equiv E(\eta'_{2,13\cdots m}\eta_{2,13\cdots m}).
$$

を得る。

§ 4. Partial Correlation $\rho_{12\cdot3\cdots m}$ の決定

普通の場合と同様にその拡張となるように $\rho_{12\cdot3\cdots}$ を定義しよう。そのために

$$
\rho_{12\cdot3\cdots m} \equiv \frac{E(\eta'_{1\cdot3\cdots m}\,\eta_{2\cdot3\cdots m})}{(E\eta'_{1\cdot3\cdots m}\eta_{1\cdot3\cdots m})\ E(\eta'_{2\cdot3\cdots m}\eta_{2\cdot3\cdots m})}
$$

として $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ の partial correlation を定義する。次にこの形の決定を試みて見よう。

初ず $E(\eta_{1\cdot3\cdots m}\eta_{1\cdot3\cdots m})$ を計算して見る。そのために係数行列 $\underset{1\alpha}{\tilde{G}}$ を決定する。先と同様に

$$
\sum_{\alpha=3}^{m}\sum_{l=1}^{p} \underset{1\alpha}{\tilde{g}_{1l}}\, \underset{\beta\alpha}{\lambda_{jl}} = \underset{1\beta}{\lambda_{j1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.\ 1)
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
\sum_{\alpha=3}^{m}\sum_{l=1}^{p} \underset{1\alpha}{\tilde{g}_{pl}}\, \underset{\beta\alpha}{\lambda_{jl}} = \underset{1\beta}{\lambda_{jp}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.\ p)
$$

(4. 1) より今 $\underset{1|12}{\overset{11}{\Lambda}}$ を次の如く定義して置けば

$$
\underset{1|12}{\overset{11}{\Lambda}} = \left|\begin{array}{lllll}
\underset{11}{\lambda_{11}} & \underset{13}{\lambda_{11}}\cdots\cdots\underset{13}{\lambda_{p1}} & \cdots\cdots\cdots & \underset{1m}{\lambda_{11}}\cdots\cdots\underset{1m}{\lambda_{p1}} \\
\underset{13}{\lambda_{11}} & & & \\
\vdots & \underset{33}{\boldsymbol{\lambda}} & \cdots\cdots\cdots & \underset{3m}{\boldsymbol{\lambda}} \\
\underset{13}{\lambda_{p1}} & & & \\
\vdots & & & \\
\underset{1m}{\lambda_{11}} & & & \\
\vdots & \underset{m3}{\boldsymbol{\lambda}} & \cdots\cdots\cdots & \underset{mm}{\boldsymbol{\lambda}} \\
\underset{1m}{\lambda_{p1}} & & &
\end{array}\right|
$$

この $\underset{1|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}$ より

$$\underset{13}{\tilde{g}}_{1l}=-\frac{\underset{1|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}{}_{1\ l+1}}{\underset{1|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}{}_{11}},\ \cdots\cdots\cdots \underset{1m}{\tilde{g}}_{1l}=-\frac{\underset{1|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}{}_{1\ l+1+p(m-3)}}{\underset{1|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}{}_{11}}$$

となり、一般に

$$\underset{i/\boldsymbol{12}}{\overset{kl}{\Lambda}}\equiv(-1)^{k+l}\left|\begin{array}{cccccc} \underset{kl}{\lambda}_{ii} & \underset{13}{\lambda}_{1i}\cdots\cdots & \underset{13}{\lambda}_{pi}\cdots\cdots\cdots\cdots & \underset{1m}{\lambda}_{1i}\cdots\cdots & \underset{1m}{\lambda}_{pi} \\ \underset{13}{\lambda}_{1i} & & & & \\ \vdots & \underset{33}{\boldsymbol{\lambda}} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \underset{3m}{\boldsymbol{\lambda}} & \\ \underset{13}{\lambda}_{pi} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \underset{1m}{\lambda}_{1i} & & & & \\ \vdots & \underset{m3}{\boldsymbol{\lambda}} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \underset{mm}{\boldsymbol{\lambda}} & \\ \underset{1m}{\lambda}_{pi} & & & & \end{array}\right|$$

とすると

$$\underset{1i}{\tilde{g}}_{kl}=-\frac{\underset{k|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}{}_{1\ l+1+(i-3)p}}{\underset{k|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}{}_{11}}$$

このときの $\boldsymbol{J}$ を $\boldsymbol{J}_{1,3\cdots m}$ とすると先と全く同様に

$$J_{1,3\cdots m}=\frac{\underset{1|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}}{\underset{1|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}{}_{11}}+\frac{\underset{2|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}}{\underset{2|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}{}_{11}}+\cdots\cdots+\frac{\underset{m|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}}{\underset{m|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}{}_{11}}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}}{\underset{i/\boldsymbol{12}}{\overset{11}{\Lambda}}{}_{11}}\equiv E(\eta'_{1,3\cdots m}\ \eta_{1,3\cdots m})$$

$$J_{2,3\cdots m}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{22}{\Lambda}}}{\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{22}{\Lambda}}{}_{11}}\equiv E(\eta'_{2,3\cdots m}\ \eta_{2,3\cdots m})$$

又 $E(\eta'_{1,3\cdots m}\ \eta_{2,3\cdots m})$ も全く同様で

$$E(\eta'_{1,3\cdots m}\ \eta_{2,3\cdots m})=Sp(\underset{12}{\boldsymbol{\lambda}}-\sum\underset{1\alpha}{\hat{G}}\underset{2\alpha}{\boldsymbol{\lambda}}-\sum\underset{2\alpha}{\hat{G}}\underset{1\alpha}{\boldsymbol{\lambda}}+\sum_{\alpha,\beta}\underset{1\alpha}{\hat{G}}\underset{\alpha\beta}{\boldsymbol{\lambda}}\underset{2\beta}{\hat{G}})$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{12}{\Lambda}}}{\underset{\boldsymbol{12}}{\Lambda_{11}}}=-\left(\frac{\underset{1|\boldsymbol{12}}{\overset{12}{\Lambda}}}{\underset{\boldsymbol{12}}{\Lambda_{11}}}+\cdots\cdots+\frac{\underset{m|\boldsymbol{12}}{\overset{12}{\Lambda}}}{\underset{\boldsymbol{12}}{\Lambda_{11}}}\right)$$

こゝに $\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{rs}{\Lambda}}$ の定義より $\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{rs}{\Lambda}}{}_{11}$ は $r,\ s$ の如何に拘わらず $(-1)^{r+s}\begin{vmatrix}\underset{33}{\boldsymbol{\lambda}}\cdots\underset{3m}{\boldsymbol{\lambda}}\\ \underset{m3}{\boldsymbol{\lambda}}\cdots\underset{mm}{\boldsymbol{\lambda}}\end{vmatrix}$ であるからこの最後の式

の符号を除いた行列式を単に、$\underset{\boldsymbol{12}}{A_{11}}$ とかいた。又容易に分るように、

$$E(\eta'_{1,3\cdots m}\,\eta_{2,3\cdots m}) = Sp(\underset{12}{\boldsymbol{\lambda}} - \sum_{\alpha}\underset{1\alpha}{\hat{\hat{G}}}\underset{2\alpha}{\boldsymbol{\lambda}} - \sum_{\alpha}\underset{2\alpha}{\hat{\hat{G}}}\underset{1\alpha}{\boldsymbol{\lambda}} + \sum_{\alpha,\beta}\underset{1\alpha}{\hat{\hat{G}}}\underset{\alpha\beta}{\boldsymbol{\lambda}}\underset{2\beta}{\hat{\hat{G}}})$$

であるから直ちにこれは

$$= E(\eta'_{2,3\cdots m}\,\eta_{1.3\cdots m})$$

であることが分る。

故に Partial Coefficient として次の如く決定される。

$$\rho_{12,3\cdots m} = -\frac{\sum_{i=1}^{m}\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{12}{A}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{A}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{22}{A}}}}$$

次に Regression Coefficient $\beta_{12,3\cdots m}$ としては

$$\beta_{12,3\cdots m} \equiv \rho_{12,3\cdots m}\cdot\frac{E(\eta'_{1,3\cdots m}\eta_{1,3\cdots m})}{E(\eta'_{2.3\cdots m}\eta_{2,3\cdots m})} = -\frac{\sum\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{12}{A}}}{\sqrt{\sum\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{A}}}\sqrt{\sum\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{22}{A}}}}\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{\sum\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{A}}}{\underset{\boldsymbol{12}}{A_{11}}}}}{\sqrt{\dfrac{\sum\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{22}{A}}}{\underset{\boldsymbol{12}}{A_{11}}}}}$$

$$= -\frac{\sum_{i=1}^{m}\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{12}{A}}}{\sum_{i=1}^{m}\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{22}{A}}}$$

同様にして

$$\beta_{21,3\cdots m} = -\frac{\sum_{i}\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{12}{A}}}{\sum_{i}\underset{i|\boldsymbol{12}}{\overset{11}{A}}}$$

故に明らかに次の関係式をうる。

$$\rho^2_{12,3\cdots m} = \beta_{12,3\cdots m}\,\beta_{21,3\cdots m}.$$

§ 5. 結　　　び

この小文は Refference〔1〕を小川博士に特に貸与していたゞき研究中に少し〔1〕の § 2 を拡張して見ようと思い Cramér 流に試みて見てごく自然な拡張公式を得たので先ず発表することにしました。併し本文は飽迄 Population についての議論であつて Sample についての Partial Correlation. Regression Correlation の議論はこれからの研究目標でありますが未だ出来ていま

せん。とまれ種々御便宜と御指導をうけた小川潤次郎先生と畏兄丘本正学兄に感謝の意を表します。

1955. 1・10

Refference

〔1〕 小川潤次郎 〝ヴエクトル量の相関論に於ける増山の相関係数について〟特に § 2. (unpublished)

〔2〕 Cramér Mathematical Methods of Statistics 23.2～23.4. 1951. Princeton. Univ.

〔3〕 小川潤次郎 近代数理統計学序説 § 22 1954. 恵文堂