On Hypersurfaces with Harmonic Curvature Tensor

北海道教育大学紀要（第２部Ａ）第39巻　第２号　平成元年３月
Journal of Hokkaido University of Education (Section II A) Vol. 39, No. 2　March, 1989

曲率テンソルが調和な超曲面について

諸　橋　正　之
北海道教育大学函館分校数学教室
函館　040

On Hypersurfaces with a Harmonic Curvature Tensor

Masayuki MOROHASHI
Mathematics Laboratory, Hakodate College,
Hokkaido University of Education
Hakodate 040

Abstract

This paper gives the conditions of a conformally flat hypersurface with a harmonic curvature tensor in a space of constant curvature.

１．超曲面

M^{n+1}, $n \geqq 4$，を断面曲率 α の（n＋１）次元定曲率空間，M^n をその n 次元超曲面，g_{ab}, H_{ab}, R_{abcd}, ∇ を M^n の第１基本テンソル，第２基本テンソル，曲率テンソル，共変微分とする．ここで，a, b, ……＝１，２，……, n とする．ガウスおよびコダッチの積分可能条件より

（１．１）　$R_{abcd} = K_{abcd} + \alpha\,(g_{ad}\,g_{bc} - g_{ac}\,g_{bd})$

（１．２）　$K_{abcd} = H_{ad}\,H_{bc} - H_{ac}\,H_{bd}$

（１．３）　$\nabla_a H_{bc} - \nabla_b H_{ac} = 0$

（１．４）　$\nabla_a K_{bcde} + \nabla_b K_{cade} + \nabla_c K_{abde} = 0$

$K_{ad} = K_{abcd}\,g^{bc}$, $K = K_{ad}\,g^{ad}$ とすると（１．４）より

（１．５）　$\nabla^d K_{dabc} = \nabla_c K_{ba} - \nabla_b K_{ca}$

（１．６）　$2\nabla_b K_a{}^b - \nabla_a K = 0$

となる．
M^n の共形曲率テンソルを C_{abcd} とすると（１．１），（１．２），（１．５），（１．６）より

$$(1.7)\quad C_{abcd} = K_{abcd} - \frac{1}{n-2}(K_{ad}\,g_{bc} - K_{ac}\,g_{bd} + g_{ad}\,K_{bc} - g_{ac}\,K_{bd}) + \frac{K}{(n-1)(n-2)}(g_{ad}\,g_{bc} - g_{ac}\,g_{bd})$$

$$(1.8)\quad C_{abcd} = -C_{bacd} = -C_{abdc} = C_{cdab}$$

$$(1.9)\quad C_{abcd}\,g^{ab} = 0$$

$$(1.10)\quad \nabla^d C_{dabc} = \frac{n-3}{n-2}\left\{\nabla_c K_{ba} - \nabla_b K_{ca} - \frac{1}{2(n-1)}(g_{ba}\nabla_c K - g_{ca}\nabla_b K)\right\}$$

となる．

補題　M^n が共形的に平坦である必要十分条件は

$$(k_a - k_b)(k_c - k_d) = 0$$

である．ここで k_a は主曲率，a, b, c, d は全て異なる．

証明　［1］より

$$C_{abcd}\,C^{abcd} = \frac{1}{2(n-1)(n-2)}\,\Sigma\,(k_a - k_b)^2 (k_c - k_d)^2$$

ここで和は全て異なる a, b, c, d についてとる．上式より結論を得る．

2．主定理

この節では常に

$$(2.1)\quad \nabla^d K_{dabc} = 0$$

を仮定する．(1．5)，(1．6)，(2．1) より

$$(2.2)\quad \nabla_a K_{bc} - \nabla_b K_{ac} = 0,\quad \nabla_a K_b{}^a = 0,\quad \nabla_a K = 0$$

となる．(1．4) とリッチの恒等式より

$$\begin{aligned}\nabla^e \nabla_e K_{abcd} K^{abcd} &= 2\nabla^e \nabla_a K_{ebcd} K^{abcd} \\ &= 2(\nabla_a \nabla^e K_{ebcd} + R_a{}^e K_{ebcd} - R^e{}_{ab}{}^f K_{efcd} \\ &\quad - 2R^e{}_{ac}{}^f K_{ebfd})K^{abcd}\end{aligned}$$

となる．したがって (2．1) より

$$\nabla^e \nabla_e K_{abcd} K^{abcd} = 2(R_a{}^e K_{ebcd} - R^e{}_{ab}{}^f K_{efcd} - 2R^e{}_{ac}{}^f K_{ebfd}) K^{abcd} \tag{2. 3}$$

を得る．同様に

$$\nabla^e \nabla_e K_{ab} K^{ab} = (R_a{}^c K_{cb} - R^c{}_{ab}{}^d K_{cd}) K^{ab} \tag{2. 4}$$

を得る．$\{e_a\}$を主曲率k_aに対する接空間の正規直交基底とする．このとき，$a \neq b$ならば，

$$R_{abab} = -R_{abba} = -k_a k_b - \alpha \tag{2. 5}$$

$$K_{abab} = -K_{abba} = -k_a k_b \tag{2. 6}$$

となり，その他のR_{abcd}, K_{abcd}は全て0である．同様に

$$R_{aa} = \sum_b R_{abba} = (\sum_b k_b) k_a + (n-1)\alpha \tag{2. 7}$$

$$K_{aa} = \sum_b K_{abba} = (\sum_b k_b) k_a \tag{2. 8}$$

となり，その他のR_{ab}, K_{ab}は全て0である．(2. 3), (2. 5), (2. 6), (2. 7) より

$$\begin{aligned}
\nabla^e \nabla_e K_{abcd} K^{abcd} &= 4\sum_{a,b}(\sum_c R_{acca}) K_{abab}{}^2 \\
&\quad - 4\sum_{a,b} R_{abba} K_{abab}{}^2 - 4\sum_{a,b} R_{abba} \sum_c K_{acac} K_{bcbc} \\
&= 2\sum_{a,b} R_{abba} \sum_c (K_{acac}{}^2 + K_{bcbc}{}^2 - 2K_{acac} K_{bcbc}) \\
&= 2\sum_{a,b} R_{abba} \sum_c (K_{acac} - K_{bcbc})^2
\end{aligned}$$

上式より

$$\nabla^e \nabla_e K_{abcd} K^{abcd} = 2\sum_{a,b}(k_a k_b + \alpha)(k_a - k_b)^2 \sum_c k_c{}^2 \tag{2. 9}$$

を得る．同様に

$$\nabla^e \nabla_e K_{ab} K^{ab} = \frac{1}{2} \sum_{a,b}(k_a k_b + \alpha)(k_a - k_b)^2 (\sum_c k_c)^2 \tag{2. 10}$$

となる．$\nabla_e C_{abcd} C^{abcd}$の発散をとると

$$\begin{aligned}
\nabla^e (\nabla_e C_{abcd} C^{abcd}) &= \nabla_e C_{abcd} \nabla^e C^{abcd} + \nabla^e \nabla_e C_{abcd} C^{abcd} \\
&= \nabla_e C_{abcd} \nabla^e C^{abcd} + \nabla_e \nabla^e K_{abcd} K^{abcd} \\
&\quad - \frac{4}{n-2} \nabla^e \nabla_e K_{ab} K^{ab} + \frac{2K}{(n-1)(n-2)} \nabla^e \nabla_e K
\end{aligned}$$

（2．2），（2．9），（2．10）より

$$\nabla^e(\nabla_e C_{abcd} C^{abcd}) = \nabla_e C_{abcd} \nabla^e C^{abcd}$$
$$+ \frac{1}{n-2} \sum_{a,b}(k_a k_b + \alpha)(k_a - k_b)^2 \{2(n-2)\sum_c k_c^2 - 2(\sum_c k_c)^2\}$$
$$= \nabla_e C_{abcd} \nabla^e C^{abcd}$$
$$+ \frac{1}{n-2} \Sigma (k_a k_b + \alpha)(k_a - k_b)^2 \{\sum_{c,d}(k_c - k_d)^2\}$$

となる．したがって

（2．11）
$$\nabla^e(\nabla_e C_{abcd} C^{abcd}) = \nabla_e C_{abcd} \nabla^e C^{abcd}$$
$$+ \frac{1}{2(n-2)} \sum_{a,b,c,d}(k_a k_b + k_c k_d + 2\alpha)(k_a - k_b)^2 (k_c - k_d)^2$$

を得る．

定理　M^{n+1}，$n \geqq 4$，を断面曲率 α の定曲率空間，M^n をそのコンパクト，可符号な超曲面とする．このとき

(i)　$\nabla^a K_{abcd} = 0$

(ii)　$k_a k_b + k_c k_d + 2\alpha > 0$

ならば，
M^n は共形的に平坦である．

証明　（2．11）とグリーンの定理より

$$\int\{\nabla_e C_{abcd} \nabla^e C^{abcd}$$
$$+ \frac{1}{2(n-2)} \Sigma (k_a k_b + k_c k_d + 2\alpha)(k_a - k_b)^2 (k_c - k_d)^2\} dV = 0$$

となる．上式と(ii)より

$$(k_a - k_b)(k_c - k_d) = 0$$

となり前節の補題によって M^n は共形的に平坦である．

文　　献

[1]　Chen, B. Y. (1973), Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker, p.150–151.

[2]　Umehara, M. (1986), Hypersurfaces with harmonic curyature, Tsukaba J. of Math. Vol.10. No.1, p.79 – 88.