柱[トウ]群截断面の幾何学的研究

柱壔群截断面の幾何学的研究

大　坂　一　二
北海道学芸大学函館分校数学科教育研究室

Katsuji OSAKA : The Study of Geometrical Section Plan at Cylinder and Pillar Group

序　　　言

本研究論文の結果は私が多年図形直観法なる幾何学の直観教授法を提唱していたところから出て来た全く私なりの独創的のものである。最初論文として，柱壔幾何学の建設として出したがそのときは研究の緒についたばかりであつた。今その後一歩深く進めて研究した結果が，本研究論文になつたわけである。内容は楕円定理 122 をまとめ法則化することが出来た。そこで柱壔幾何学の根本思想は総べての平面幾何定理のあらわす図形に一定の高さを与えるとき，そこに一連の柱壔群が得られる。亦一面一連の柱壔定理群が得られるとも考えられる。次は今一定の高さが与えられたる柱壔群即ち立体図形を θ なる角度にて截断することにより，より一般性を帯びた平面図形を得るということである。次は従来の平面幾何図形はこの柱壔群截断図形に於ける特殊の場合である。即ち截断角 θ の 0 度の場合，即ち高さに対し截断面の垂直なる場合である。よつて今迄の平面幾何学のかげにより一般性を有する平面幾何学が存在するということである。柱壔幾何学の内容とするところは従来の平面幾何学とほぼ同等のものであるが直線図形論，面積論，軌跡論，作図論等々全般に至るものであり，特に顕著なる点は楕円論が加わることである。従来の平面幾何学に於いては直線形円図形が極めて深く研究されていたが，楕円形が割合に敬遠され，其の取扱いも高等数学分野に於いてなされていたものであるが，柱壔幾何学に於いては初等的に手近に豊富に手軽に楕円が導入されて来るのである。柱壔幾何学に於いては二つの基本的事実が示されるのである。一つはすべての円は相似応位の位置にあるということであり，従つて今一つは同一截断面の幾何図形に於いてはすべての楕円は相似応位の位置にあるということである。以上の二つの基本的事実のもとに出来得る限り楕円定理を誘導した次第である。幸に柱壔群を構成する基礎定理即ち誘導定理は無限にあり，過去の幾何学者が微に入り細を穿つて研究されていたのである。柱壔幾何学に於いてはこの誘導定理をそのまゝそつくり借り入れて一般に拡大された幾何学を建設するに努めたのである。誘導された定理が 122 に及びましたが，この中には今迄にあらわれない新しい定理もあると思うのである。

柱壔幾何学に於いては截断角 θ の大さと基礎定理図形の位置と大さに関係することが大きな問題である。柱壔幾何図形は θ の函数であり，位置の函数であり，大さの函数である。今従来の平面幾何図形即ち誘導図形を第一図形と名命し，截断図形即ち第一図形の截断面への射影図形を第二図形と名命する。柱壔幾何学に於いては根本手法として初歩的投影法を用いるのである。第一図形は投影図に於ける平面図に相当する。第二図形は截断実形に相当する。尚亦截断角も単角度とする。

ここに二，三の述語について述べて見たいと思う。第二図形即ち截断図形に於いて三角形の第二垂心と云えば第一図形三角形の第二図形への射影である。三角形の角の第二二等分線と云えば第一

図形に於ける三角形の角の二等分線の第二図形への投影である。柱壔幾何学に於いては色々の場合第二なる述語を用いるが，何れも第一図形の第二図形面への投影を意味する。又第一図形を誘導図形或は随伴図形とも云う。第一図形即ち誘導図形定理群と第二図形定理群とは密接不離の関係にある。定理の証明に当つては二つの方法がある。一つは第一図形即ち誘導定理から入る場合と，直に第二図形即ち截断面定理より入る場合とがある。何れにしても第一図形定理と第二図形定理とは相即不離にして第一図形より第二図形が求められ，第二図形より第一図形が求められるようになつている。よつて楕円定理も中には第一図形第二図形が一体になつて成立するものもある。第二図形より証明に入るには先ず誘導定理を構成しなければならない。例えば第二図形に於いて三角形の三つの第二垂線は一点に会すと云う定理ある場合，第二図形三角形より第一図形の三角形を構成し，その図形三角形に於いて平面幾何学に於いて三角形の三垂線は一点に会すると云う定理より垂心を求めその射影としての第二垂心を第二図形中に求め三つの第二垂線は一点に会すると云うことを証明するのである。第二図形中に楕円が与えられる場合の第一図形の構成は次の如くする。その楕円の短軸の長さと長軸の長さとの比により余弦を求め，それにより θ を決定する。θ 角が決定されると投影法を逆にし第一図形を画き楕円の対応円を決定し，既設の誘導定理を借りて第二図形に及ぼすのである。同一截断面定理中に二ヶ，三ヶ，或は四ヶ……の相似応位の楕円ある場合何れも軸が平行の位置にあることを考え，一つの楕円形についての截断角 θ を決定し，かくして第一図形を求め数個の対応円を決定する。尚述語について再言附言せんに柱壔幾何学に於いては三角形の外接楕円，内接楕円，傍接楕円九点楕円等の新定義述語を用いている。従来の平面幾何学に於いては三角形の外接円とか内接円とか傍接円とかは一定していますが，柱壔幾何学に於いてはこれ等の楕円は不定であることである。これ等の楕円は位置の函数であり θ 角の函数であり，第一図形に於いては位置と θ 角が決定されて初めて決定されるのである。

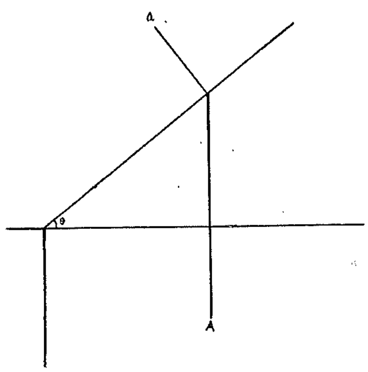
以上柱壔幾何学の根本思想及び研究手法等を抽象的に述べた次第であるが，研究の範囲が広い為に短月日に完結が困難に思われるが楕円作図論等は興味深いものと思うのである。

尚本研究は柱壔群截断面の幾何学的研究であるが，これに平行して柱壔群截断面幾何学の解析的研究もなしつつある次第である。

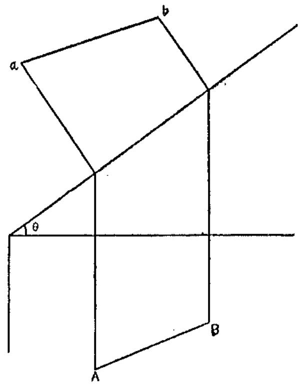
柱壔群截断図形

今柱壔群の平面図形即ち投影法に於ける平面即ち底面を第一図形と名命す。截断面の実形即ち第

(1)



(2)



一図形より截断面への投影図形を第二図形と名命す。

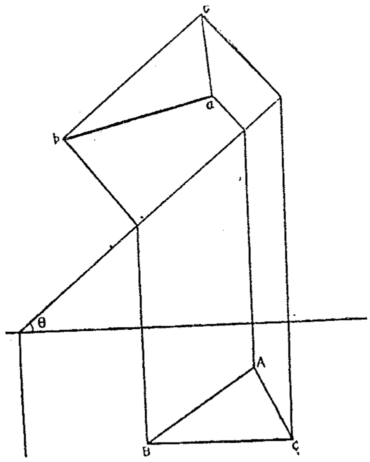
大 坂 一 二

（1）図形　点Aの截断面への実形は a である。

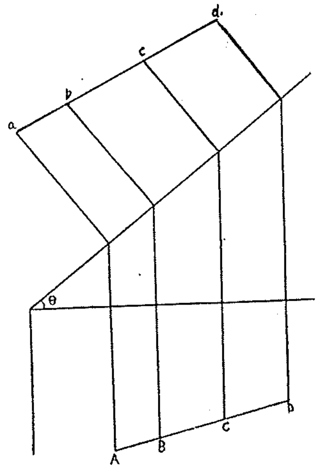
（2）図形　第一図形線分 AB の第二図形は線分 ab である。 この場合 AB と ab に於いては長さが相違することである。第一図形に於ける長さ量が第二図形に於いてはそのまゝは残存せざることである。

（3）図形　柱壔図形即ち直三角壔の截断図形である。 第一図形三角形 ABC が第二図形三角形

（3）



（4）

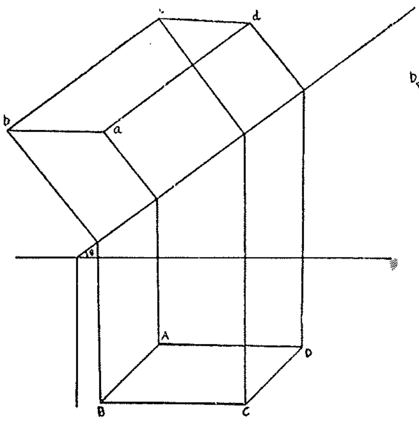


abc となる。今三角形 ABC と三角形 abc に於いて比較するに一般には辺の長さが相違するし各角の大さも相違するのである。

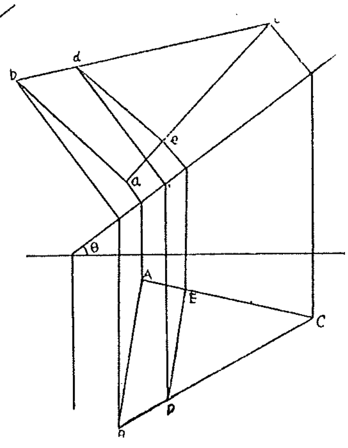
（4）図形　第一図形に於いて四点 A, B, C, D が共線点とするならば，第二図形に於いても四点 a, b, c, d は共線点となる。 尚 A, B, C, D 相互間の距離はそのまゝには残存しないが比の関係は保存されるのである。例えば AB : BC ＝ ab : bc

（5）図形　今第一図形 ABCD と第二図形 abcd を比較するに ABCD が平行四辺形なりとすれば abcd も平行四辺形となる。 即ち第一図形の平行四辺形の性質は第二図形に保存される。一般に直線の平行関係は保存される。 よつて平行四辺形 ABCD に関する諸定理はそのまゝ abcd 図形に当てはまるのである。ここに種々 ABCD と abcd の相対的定理を述べることは省略する。

（5）



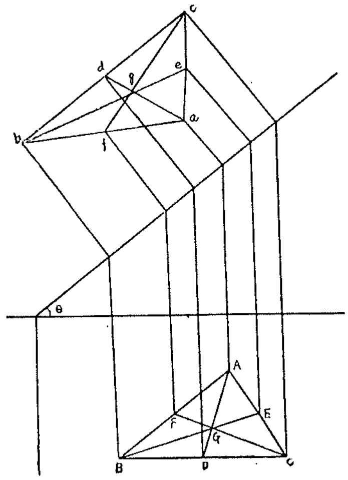
（6）



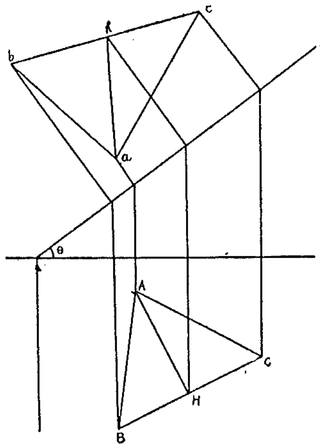
（6）図形　第一図形は三角形に於いて DE は AB に平行なる図形である。三角形の辺と角との性質は一般には保存されないが，その比例関係は保存さる。

（7）図形　三角形 ABC に於いて AD, BE, CF が何等かの関係で一点に会するものとすれば三角形 abc に於いても ad, be, cf は一点に会する。即ち共点線の性質はあく迄保存される。

（7）



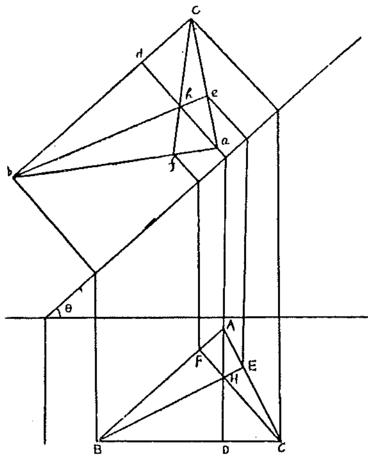
（8）



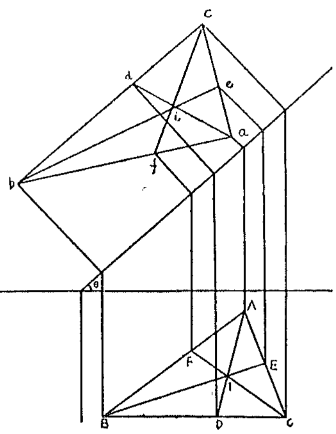
（8）図形　第一図形に於いて △ABC にて AH が BC に垂直になつているものとすれば，第二図形 △abc に於いては ah は bc に垂直でないのである。則ち第一図形と第二図形に於いては垂直関係は保存されないのである。

（9）図形　第一図形は三角形の三垂線は一点に会するという図形である。第二図形に於いては垂線の性質が保存されないから，第二図形では三垂線とはならない。即ち三角形 ABC の垂心 H は

（9）



(10)

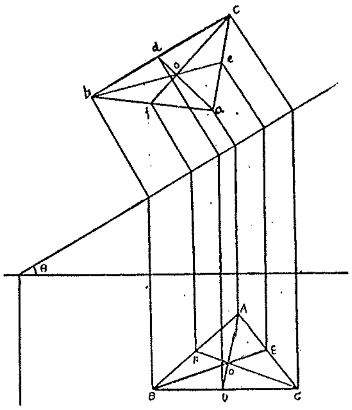


その性質を失つたことになるのであるが，然も一点に会すると云う性質は保存される。半面喪失半面保存という面白いことになるのである。この問題について新しい定義を与えたのである。即ち第二図形の h の位置は截断角 θ の函数である。θ 角が決定されれば h の位置も決定される。h を H

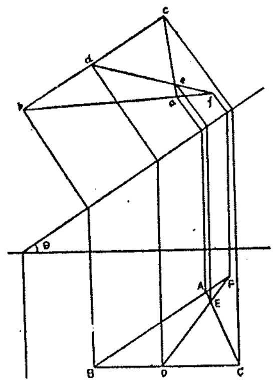
の第二垂心と名命するのである。即ち △ abc の第二垂心は △ abc の投影原形三角形 ABC の垂心の截断面への投影を指すのである。三角形 abc の第二垂心は第一図形の位置と截断角が決定されることにより自然と定まるのである

(10) 図形　第一図形は △ABC に於いて AD, BE, CF は角 A, B, C の二等分線とすれば，三角の二等分線は一点に会するのである。第二図形に於いては ad, be, cf は角 a, b, c の二等分線にはならないが，一点に会すると云う性質は保存されるのである。これを新定義の言葉を借りて云えば，截断面三角形の角の第二二等分線は一点に会する。と云うことが言え得るのである。

(12)



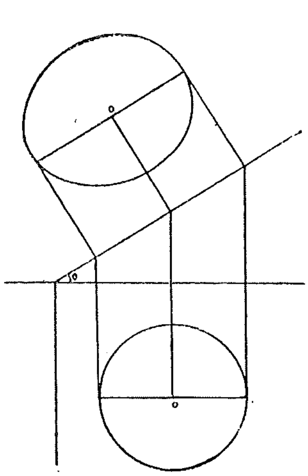
(13)



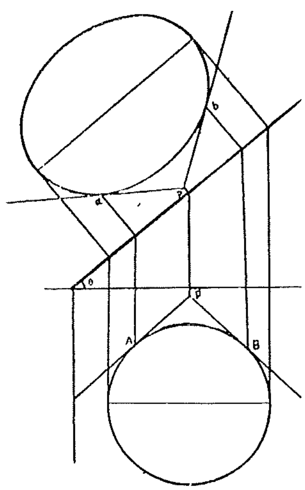
(12) 図形　本図形中第一図形は △ ABC に於いて三中線 AD, BE, CF は一点に会するのであるが，第二図形 abc に於いても三中線 ad be cf は一点に会するのである。この場合三角形の中線の性質が保存され，尚且つ一点に会すると云う性質も保存されるのである。よつてこの場合線分の中点の性質が保存されるのである。即ち線分の二等分点が保存されるのである。よつて第一図形と第二図形とに於いて重心の性質が保存されるのである。よつて第一図形に於ける中線に関する定理や重心に関する定理は第二図形に於いて多分に成立するのである。

(13) 図形　第一図形は △ABC に一直線が交わる図形である。この場合予想されるのは，メネラ

(14)



(15)



ウスの定理である。これが第二図形に於いても当然成立するのである。即ちメネラウスの定理が保存されるのである。

(14) 図形　第一図形は円にして，その柱壔体の截断図形は即ち第二図形は楕円である。本研究論文の根幹をなすものはこの円壔の截断面が楕円となると云うことである。この楕円の形状は截断角θの函数である。今一定円が第一図形として与えられたときθが決定すれば楕円の形状が決定し逆に楕円の形状が決定すればθが決定されるので，楕円の形状はθの函数である。一般的に第一図形円の性質は第二図形で楕円となり，円の性質が全部は保存されないのである。

(15) 図形　第一図形は円の二切線であるが，この場合円が楕円に変化し，円の切線が楕円の切線となると云うことである。円の切線の性質が保存されると云うことである。

楕円定理証明

楕円定理証明には二つの方法がある。其の一つは解析的方法である。他の一つは幾何的方法である。柱壔群截断面に於ける解析的証明には，種々の方程式を設定する必要がある。然し截断面図形は截断角度の函数であり，位置の函数である関係上方程式にも必然函数ファクトが入つて来るのである。それで解析的研究は別に研究されているのである。幾何的方法としては図形直観法なる新手法を用いているのである。

図形直観法の原理　柱壔群截断面の幾何学的研究に於いては先ず最初に従来の平面幾何図形全部に亙つて一定の高さを与えると云うことである。今点に高さを与えると直線となり，直線に高さを与えると平面となり，多角形に高さを与えると多角壔となり，円形に高さを与えると円壔となる。これ等の高さが与えられたる図形は，何れも底に垂直になつているのである。この図形を柱壔体と呼ぶのである。この柱壔母体は平面幾何定理に応用されるとき，そこに柱壔定理母体が形成されるのである。かくして平面幾何全分野に亙り柱壔定理母体が構成されるのである。この柱壔定理母体群は柱壔群截断面の幾何学的研究の基礎となり，柱壔幾何学構成の最初の出発点である。この柱壔母体を一平面にて截断し截断実形を得るのである。截断手法は大体初歩の投影法を借りるのである。今立面図に垂直にして平面図にθなる角度にて截断するのである。即ち単角度截断である。かくして得たる截断実形の研究が主体をなすもので，柱壔幾何学の対象図形である。

従来の平面幾何定理図形を平面図の上におく。然るときこの幾何図形を第一図形と呼ぶ。又截断面実形図を第二図形と云う。然るときは第一図形はθの$0°$のときの截断面となる。即ちθの$0°$即ち特殊の場合である。θの角度は一般に$0°$より$90°$迄の間の角の大さの函数である。第二図形は一般図形である。即ち第二図形が新しく浮び出たる一般幾何学である。別言すれば射影幾何学と古典幾何学を，一緒にした綜合幾何学とも云うべきである。この一般幾何学は古典幾何学の量的部分も取扱うと同時に，射影的性質をも取扱うのである。

第一図形と第二図形とは密接不離の関係にあり，第一図形を第二図形の誘導図形とも云う。第一図形は第二図形の道案内役を務めるものである。提灯持役である。第一図形を誘導定理として第二図形の定理を証明構成するのが本研究の大事な点である。この第二図形の定理の証明構成の方法の一つとして，図形直観法なる新証明法を提唱するところである。第一図形定理は従来の幾何定理で既知の定理である故今回は証明は省略するが，これを土台として図形直観法なる証明手法を用いて第二図形定理を証明構成するのである。図形直観法には第一図形定理の性質の中，截断により残存する性質を巧みに捉えて行くのである。図形直観法に於いては根本原理を示してそれにより推論を進めて行くのである。

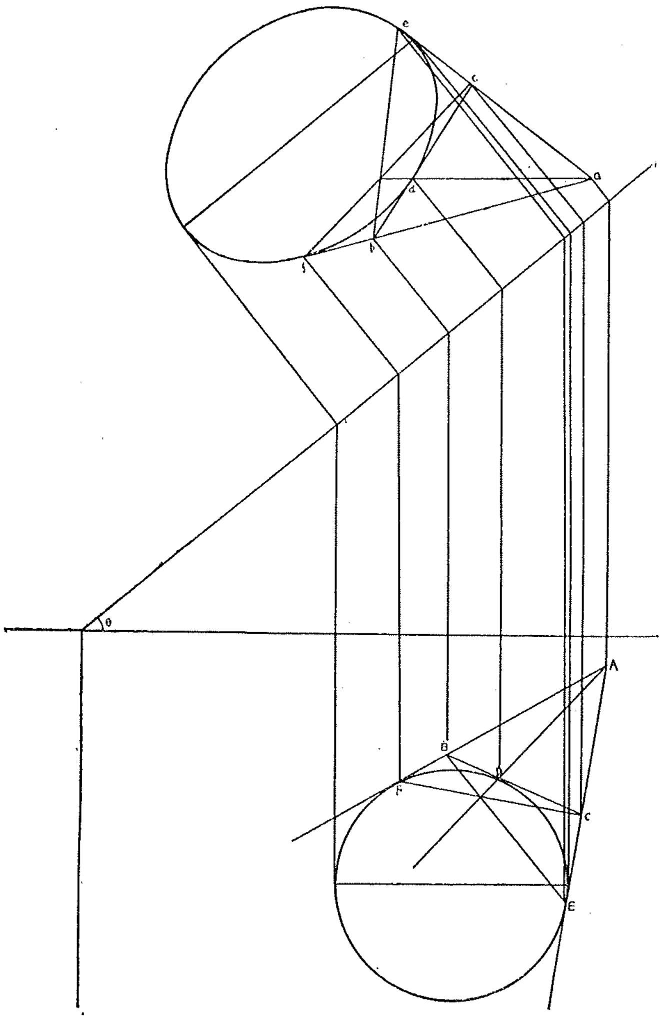
次に図形直観法の根本原理を示すと

大　坂　一　二

1. 線分の中点の性質は截断後の図形に保存さる。
   線分の長さが保存されないが中点の性質が保存される。
2. 直線の平行関係は保存さる。
3. 直線上の比例関係は保存さる。
4. 共線点関係は保存さる。
5. 共点線関係は保存さる。
6. 円と直線，円と円との相切する関係は保存さる。
7. 一連の相似応位円は一連の相似応位の楕円となり，相似応位の性質は保存さる。
   よつてすべての円は相似応位なる故截断により生ずるすべての楕円は相似応位となる。よつて同一截断に属する数個の楕円は皆相似応位となる。
8. 正方形，矩形，平行四辺形は截断後平行四辺形となり台形は台形となる。
9. 三角形の三中線関係は保存さる。

以上図形直観法の根本原理を示したが，これ等は何れも解析的に証明出来ることである。

図形直観法証明例示　　　　例　示



誘導定理　第一図形定理

三角形 ABC の傍接円が三辺 BC, CA, AB と接する点を夫々 D, E, F とすれば AD, BE, CF は一点に会す。

楕円定理　第二図形定理

三角形 abc の傍接楕円が三辺 bc ca ab と接する点を d, e, f とすれば ad, be, cf は一点に会す。

図形直観法による証明法

1. 誘導定理即ち第一図形定理を平面図上に置く。
2. 本定理図形に一定の高さを与う，即ち柱壔定理母体を設定す。
3. 立面図に垂直平面図に θ なる平面にて截断す。
4. 円は截断後楕円となる故傍接円は傍接楕円となる。即ち円と三角形の辺との相接関係は截断後残存し楕円と三角形の辺の相接関係となる。
5. AD, BE, CF の三直線関係の共点線関係は截断後保存さる。よつて ad, be, cf は一点に会す。よつて証明せられた。

備考　三角形の三辺に接する楕円を夫々内接楕円，傍接楕円と称す。三角形の内接楕円，傍接楕円は不定形である。θ の函数である。

誘導定理　第一図形定理

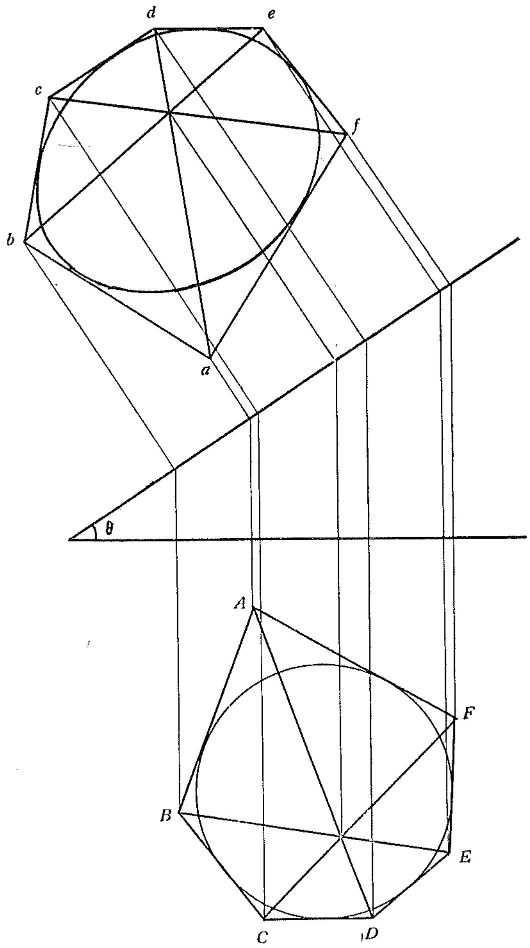
円に外接するすべての六辺形 ABCDEF に於いて相対する二つの頂点を結びつくる対角線は同一の点に於いて交わる。

楕円定理　第二図形定理

楕円に外接するすべての六辺形 a b c d e f に於いて相対する二つの頂点を結びつくる対角線は同一の点に於いて交わる。

証　明

1. 本定理図形を平面図上に置く。
2. 此の第一図形に一定の高さを与う。即ち柱壔定理母体を設定す。
3. θ なる角度にて截断す。
4. 円は楕円となる。
5. 円に外接する六角形は楕円に外接する六角形となる。接辺関係は保存さる。
6. 円の対角線関係は楕円に外接する六角形の対角線関係となる。
7. 円に外接する六角形の対角線の三直線の共点線は楕円に於ける夫等の三直線の共点線となる。共点線の関係は保存さる，よつて定理は証明せられた。



誘導定理　第一図形定理

三角形 ABC の外心Oを過ぎる任意の直線が辺 BC, CA, AB と交わる点を夫々 P, Q, R とし且つ此の直線上に於いて三点 P′ Q′ R′ をとりOが三線分 PP′ QQ′ RR′ の中点なるようにすれば，直線

AP′, BQ′, CR′ は外接円周上の同一の点Mに於いて相交わる。

楕円定理　第二図形定理

三角形 abc の外接楕円の中心oを通過する任意の直線が辺 bc, ca, ab と交わる点を夫々 p, q, r とし且つ此の直線上に於いて三点 p′ q′ r′ をとり o′ が三線分 pp′, qq′, rr′ の中点なるようにすれば直線 ap′, bq′, cr′ は外接楕円周上の同一の点mに於いて相交わる。

証　明

1. 既に証明されたるこの平面幾何定理を截断を実施すべき平面図上に置く。

2. 今一定の高さを与え，柱壔定理母体を設定す。

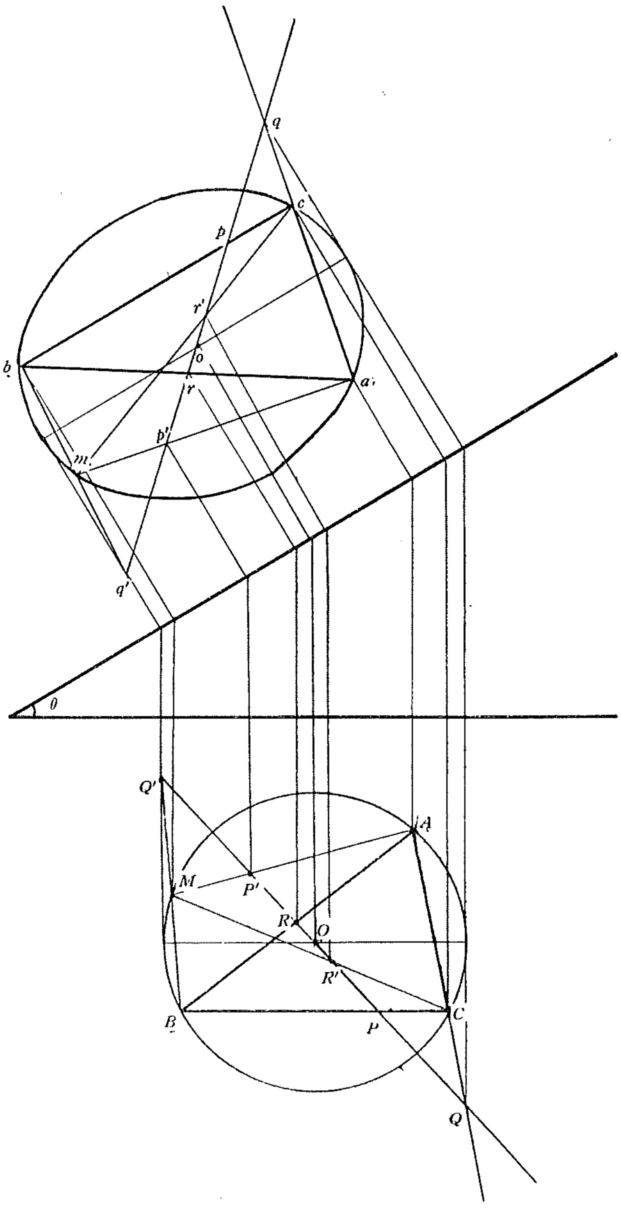
3. θ なる平面にて截断す，即ち截断実形図を得。

4. 三角形 ABC の外接円は，外接楕円形となる。

5. Oが三線分 PP′, QQ′, RR′ の中点なる故其の中点の性質は截断後も残存す。即ち o が pp′, qq′, rr′ の中点となる。

6. 直線 AP′, BQ′, CR′ は外接円周上M点に於いて共点線なる性質は残存さる。即ち截断後直線 ap′, bq′, cr′ 外接楕円周上の一点，mに於いて相交わる。

備考　外接楕円とは三角形の三頂点を通る楕円を云う不定形である。



楕円定理群

ここに図形直観により導き出された定理 122 に及んだが，中には系，問題に類するものもあると思えます。然し中には新しい定理も含まれていると思う。尚従来の平面幾何定理即ち誘導定理と楕円定理を比較するに，円が楕円に置き換えられているに過ぎないので，本楕円群には誘導定理は記載を省略する。尚楕円定理を証明するには既知の誘導定理より入る場合と，真直に本定理に入る仕方と二通りあるが直接本定理に入つた場合誘導定理との関係はどうなるかと云うことである。即ち誘導定理を構成する必要があるのである。この事については序論に於いて少し述べている如く，截断角度 θ が問題なのである。一つの楕円又は，相似応位の数個の楕円が与えられるとき，それに従つて θ 角が一つ決定されるのである。それによつて対応円を求め，誘導定理

を構成するのである。

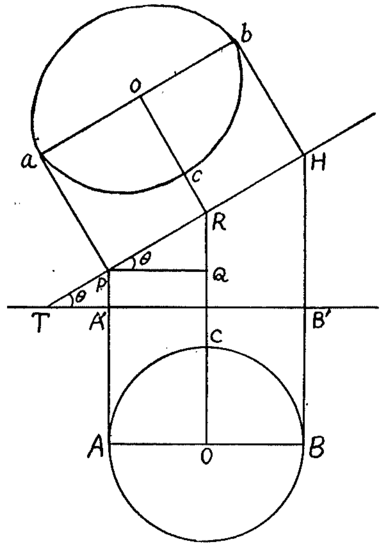
$$\cos\theta = \frac{PQ}{PR} = \frac{OA}{oa} = \frac{OC}{oa}$$

よつて楕円に直接入つた場合其の楕円の短軸：長軸の比を求め $\cos\theta = \frac{\text{短軸}}{\text{長軸}}$ とし，それより θ を決定し対応円を求める。

作図は次の順序による。

先ず楕円の長軸を決定し，$ab\perp ap$ $oR\perp ab$ $bH\perp ab$ とし，$ab \parallel pH$ を作り $\cos\theta$ = 短軸：長軸より θ を決定し，TH と θ 角をなす直線 $TA'B'$ を引く。然る後 P, R, H より $TA'B'$ に垂線を引き PA, RO, HB とす。

$ap=A'A$ $bH=B'B$ なる如く A, B を決定す。AB を直径とする円を画けば楕円の対応円は求めたる θ 円である。



定理　1. 三角形の内接楕円が，辺 bc, ca, ab に接する点をd, e, f とすれば ad, be, cf は一点に会す。

定理　2. 楕円に外接するすべての六辺形 abcdef に於いて相対する二つの頂点を結びつくる対角線は，同一の点に於いて交わる。

定理　3. 楕円に外接する総べての五辺形に於いて，任意の隣接せざる二頂点を結びつくる対角線と，第五の頂点を対辺の接点に結びつくる直線との三つは，同一の点に於いて交わる。

定理　4. 楕円に外接するすべての四辺形に於いて，二組の対辺の接点を結びつくる直線と対角線とは同一の点に於いて交わる。

定理　5. 楕円に外接するすべての四辺形 abcd に於いて二つの相対する角 b, d の頂点を結びつくる直線と，これ等の角の一つを作為する辺の二つの接点を，他の二つの頂点と結びつくる直線との三つは同一の点に於いて相交わる。

定理　6. 三角形の三傍接楕円がその楕円を含む角の頂点に対する辺と切する点を，其頂点と結びつくる三直線は一点に会す。但し三傍接楕円は相似応位なるものとす。

定理　7. 三角形の外接楕円の中心 o を過ぎる任意の直線が辺 bc, ca, ab と交わる点を x, y, z とすれば，線分 ax, by, cz を径とする楕円を画くときは，夫等三つの楕円は二点を共有し，一つは外接楕円周上に，一つは九点楕円周上にあり，但しすべての楕円は相似応位とす。

備考　九点楕円とは第一図形九点円の截断面への射影図形を云う。

定理　8. 楕円に内接する五辺形の各辺とこれに隣れる二辺との交点とにて包まる五つの三角形の外接楕円の相となれる両楕円の共通弦は一点に会す。但し六つの楕円は相似応位なるものとす。

定理　9. a a′ は二つの楕円 o, o′ に共通なる接線にして，且 c′ をこれ等の楕円に接する一つの楕円とせば接弦 ab, a′b′ は楕円周 c′ の一点 r にて相交わる。但し各楕円は相似応位なるものとす。

定理　10. 三角形 abc の内接楕円を i とし，之が辺bc, ca, ab に切する点を夫々 d, e, f とし，直線 ef が辺 ab, ac の中点 m, n を連結する直線と交わる点を u とすれば，直線 du が i と交わる点は i と九点楕円との接点なり。但し内接楕円と九点楕円とは相似応位とす。

定理　11. 楕円に内接する四辺形 abcd に於いて三つの対角線を径として画ける三楕円は，二点pqに於いて交わる。但し各楕円は相似応位なるものとす。

定理　12. 楕円に内接する六辺形の各辺を底辺とし，之にとなれる二辺の延長の交点を頂点とする六つの三角形をつくるときは，相対する辺上の両三角形の頂点を結びつくる三つの線分は同一点

を通る。

定理　13. 三角形 abc の辺 bc, ca, ab の上の任意の点を d, e, f とすれば，三角形 aef, bfd, cde の外接楕円は一点に会す。但し各楕円は相似応位とす。

定理　14. 楕円に内接する四辺形を abcd とし ad(1) ab(2) b に於ける楕円の切線を (3) bc(4) c に於ける楕円の切線を (5) cd を (6) とすれば (1) と(4), (2) と (5), (3) と (6) との直線の交点 p, q, r は一直線上にあり。

定理　15. 楕円に内接する五角形を abcde とし ae(1) ab(2) bc(3) c に於ける切線を (4) cd(5) de(6) とすれば (1) と (4) (2) と (5) (3) と (6) との交点 p, q, r は一直線上にあり。

定理　16. 三角形 abc に於いて bc の中点を p とす。x を三角形の内接する楕円の辺 bc への接点とし，内接する楕円の中心を o とす。ax の中点を k とすれば p, o, k は一直線上にあり。

定理　17. 三角形 pqr は楕円に外接す。今この辺上に頂点を有するのみならず直線 ap bq cr は同じ点 d に於いて相交わるところの第二の三角形 abc をつくり，頂点 abc より切線 ax, by, cz を引き，これ等の直線が是等の頂点に対する辺 bc, ca, ab に夫々 x, y, z に交わるとすれば三点 x, y ,z は同一の直線上にあり。

定理　18. △abc の三辺の中点 d, e, f の各を通りて内接楕円に接線を引き ef fd de と夫々 l. m. n に会せしむれば是等の三点は一直線上にあり。

定理　19. 二つ宛相切する三つの楕円の接点を abc とし，二楕円の弦 ab, ac の延長が第三楕円と交わる点を夫々 d, e とし，其の楕円の中心を o_3 とすれば三点 d, o_3, e は一直線上にあり。但し三楕円は相似応位とす。

定理　20. 楕円周 o の上にある点 m より楕円周上に三つの直線 ma, mb, mc を引き是等の直線を径として其の上に三つの楕円を画けば，これ等の楕円二つづつの交点 p, q, r は一直線上にあり。但し各楕円は相似応位とす。

定理　21. 三角形 abc の各頂点 a, b, c に於いて外接楕円に接する直線が対辺 bc, ca, ab と交わる点を夫々 p, q, r とすれば p, q, r は一直線上にあり。

定理　22. 三角形 abc の内接楕円が bc と接する点を d とし ad の中点を m，楕円の中心を o, bc の中点を n とすれば m, o, n は一直線上にあり。

定理　23. 楕円に内接するすべての六辺形 abcdef に於いて両対辺の交点 p, q, r は一直線上にあり。

定理　24. 楕円に外接する四辺形に於いては，対角線の中点と楕円の中心とは同一の直線上にあり。

定理　25. 二つの四辺形が同じ楕円に内接及び外接し,第一の四辺形 defg の頂点は第二の四辺形 abck の辺の接点なりとすれば，これ等の四辺形の対辺の交点は同一の直線上にあり。

定理　26. 楕円 o 外の一点 p より接線 pa, pb 及び割線 pcd を引き a を過ぎ cd に平行なる弦を ae とし，弦 cd の中点を m とすれば三点 e, m, b は一直線上にあり。

定理　27. 三角形 abc の内接楕円が bc, ca, ab に接する点を d, e, f とすれば直線 de, ab : ef, bc : fd, ac の交点は一直線上にあり。

定理　28. 楕円に内接する四辺形 abcd の相対する辺 ab, dc の延長の交点を e とし bc, ad の延長の交点を f とす。三角形 ade と cdf との外接楕円の交点を g とすれば，三点 e, g, f は一直線上にあり。但し各楕円は相似応位とす。

定理　29. 三角形 abc の外接楕円 m の直径を aa_1 bb_1 とし bc に平行に弦 a_1 d を引き db_1 が te 及 f に於いて ac 及び bc を截れば me||bc なり。

定理　30. 楕円 o に内接する三角形 abc の二頂点 b, c に於ける接線の交点を d とす。 o より ab, ac に平行なる直線を引き db, dc との交点を e, f とすれば ef は楕円 o に接す。

定理　31. 三角形 abc の内接楕円が辺 bc と d に於いて接するときは三角形 adb, acd の内接楕円は互に外接す。但し各楕円は相似応位とす。

定理　32. 楕円に内接する四辺形 abcd の辺 ab, bc, cd, da の中点を夫々 p, q, r, s とすれば四つの楕円 aps, bqp, crq, dsr は皆相等しく，且つ何れも楕円 abcd に内接す。但し各楕円は相似応位なるものとす。

定理　33. 平行四辺形 abcd の辺 ab 上に一点 p, cd 上に一点 q をとり三点 apq を通る楕円を画き，この楕円と ad, ac との交点を夫々 xy とすれば三角形 dqx cqy の外接楕円は互に接す。 但し各楕円は相似応位なるものとす。

定理　34. △abc の外接楕円の中心を o とし b に於ける外接楕円の接線と o を通つて ab に平行なる直線との交点を d, c に於ける外接楕円の接線と o を通つて ac に平行なる直線との交点を e とすれば de は外接楕円に接す。

定理　35. 三角形 abc の内接楕円の中心を o とし三点 boc を通る楕円が二辺 ab, ac 又は其の延長との交点を e, f とすれば直線 ef は此の三角形の内接楕円に接す。

定理　36. ab は定楕円の定径にして ad, be は両端 a, b に於ける楕円の接線なり。この楕円周上の一点を c とし，直線 ac が be との交点を e とし又直線 bc が ad との交点を d とす。直線 de が直線 ab と交わる点を f とすれば，直線 cf はこの楕円の接線なり。

定理　37. 楕円 o 外の二点 ab を通り楕円 o と交わる任意の楕円を画き，其の共通弦 cd の延長と直線 ab との交点を p とし pより楕円 o に pt を引くときは，三点 a, b, t を通る楕円は楕円 o に接す。但し各楕円は相似応位とす。

定理　38. 互に外接する三楕円の接点の連結線 ba, bc を延長し，その一楕円を q, p にて截れば pqは其の楕円の直径となる。

定理　39. 楕円に内接する四辺形 abcd の一双の相対する辺 bc, ad が中心 o を通る一つの直線 l と交わる点を p, p′ とし，他の一双の相対する辺 ab, cd が l と交わる点を q q′ とし，対角線 ac, bd が l と交わる点を r r′ とするとき，もしも o が p p′ の中点ならば o は同時にまた q q′, r r′ の中点なり。

定理　40. 三角形 abc に於いて，重心 g の第二類似重心を l とし今 l を通り辺 bc, ca, ab に平行線 $d_1 d_2 : e_1 e_2 : f_1 f_2$ を引き夫々の辺との交点を $d_1 d_2 : e_1 e_2 : f_1 f_2$ とせば $d_1 d_2 e_1 e_2 f_1 f_2$ は同一楕円周上にあり。

備考　第二類似重心とは第一図形定理に於ける三角形の類似重心の第二図形に於ける三角形への投影点である。

定理　41. 三角形 abc に於いて外接楕円の中心 s を頂点 a, b, c に結びつくる直線が外接楕円と交わる点を夫々 $m_1 m_2 m_3$ とし $m_1 m_2 m_3$ より bc, ca, ab へ引ける第二垂線の足を d, e, f とせば，ad, be, cf は一点に会す。

定理　42. 三角形 abc に於いて外接楕円の中心 s を頂点 a, b, c に結びつくる直線が，外接楕円と交わる点を夫々 $m_1 m_2 m_3$ とし $m_1 m_2 m_3$ より夫々 bc, ca, ab へ引ける第二垂線の足を d, e, f とせば m_1d. m_2e. m_3f は一点に会す。

定理　43. 三角形 abc の重心を g，第二類似重心を l とし，直線 ag, bl の交点を d とす。点 a を過ぎりて辺bc に平行なる直線と点 b に於ける三角形 abc の外接楕円の切線との交点を e とせば d, e, c は一直線上にあり。

大　坂　一　二

定理　44. p, q に於いて相交わる両楕円の一つに内接する四辺形 abcd の各頂点を q に結びつくる直線が他の楕円周と交わる点を a′, b′, c′, d′ とす。両四辺形　abcd : a′b′c′d′ に於いて対応する三頂点にてなる両三角形の各の p に関する第二シムソン線の交点四組の両三角形に対する此の交点の四つは同一直線上にあり，組各楕円は相似応位とす。

備考　第二シムソン線とは，第一図形シムソン線の第二図形面への投影線を云う。