主ファイバーバンドルの特性準同型について

第 8 巻 第 2 号　　北海道学芸大学紀要（第二部）　　昭和32年12月

主ファイバーバンドルの特性準同型について

木　村　信　夫
北海道学芸大学函館分校数学教室

Nobuo KIMURA : On characteristic homomorphisms of principal fibre bundles.

主ファイバー・バンドル $D=\{B, p, X, Y, G\}$ において、基礎空間 X が弧状連結なら X の基本群と G の剰余群との間に準同型が定義される。(N. Steenrod, The topolagy of fibre bundles. p. 93) 更に X の n 次元ホモトピー群と G の $n-1$ 次元ホモトピー群の間にも一つの準同型が定義されるが、ここでは n 次元ホモトピー群の基本群による作用とそれら準同型との関係を述べることにする。

以下記号は大体前述の N. Steenrod のそれを用いる。

1. $D=\{B, p, X, G, G\}$ を主ファイバー・バンドルとする。即ち B はバンドル空間、X は弧状連結で paracompact なる基礎空間、$p: B\to X$ は射影、G はバンドルの群で且ファイバーとする。

$X\ni x_0$ に対し $p^{-1}(x_0)=G_0$ とおき

$\xi: G\to G_0$ を一つの admissible map とする。

$\xi(e)=e_0$ とおく、但し e は G の単位元。

G_e を、e を含む arc component とし、

$\eta: G\to G/G_e=\pi_0(G)$

を natural homomorphism とする。

2. D の characteristic homomorphism

$$X_1: \pi_1(X, x_0)\to G/G_e=\pi_0(G)$$

を次のように定義する。

$\pi_1(X, x_0)\ni\alpha$ を表わす一つの道を

$$C(t): [0, 1]\to X$$
$$C(0)=C(1)=x_0$$

とする。

$G_t=p^{-1}(C(t))$ とすると covering homotopy theorem により

$$h: G\times I\to B,$$
$$ph(g, t)=C(t),$$
$$h(g, o)=\xi$$

なる写像 h が定まる。

従つて $h_t=h(g, t)$ とおけば

$$h_t:\ G \to G_t$$
$$h_0 = \xi.$$

便宜上　$h_1\xi^{-1}:\ G_0 \to G_0$
を α で表すと、

$$\xi^{-1}\alpha\xi:\ G \to G$$

なる写像が定まる。

$\xi^{-1}\alpha\xi$ は G の一つの元 $g \in G$ を表わす。

g は $C(t)$ によつてきまるが G/G_e は totally disconnected だから $\eta(g)$ は $C(t)$ によらないことが証明される。

$$\eta(g) = \kappa_1(\alpha)$$

とおくと κ_1 は α にのみ関係して定まる。

明らかに κ_1 は

$$\pi_1(X,\ x_0) \to G/G_e$$

なる準同型対応をひきおこす。

3.　$n \geqq 2$ ならば p は

$$\pi_n(B,\ G_0,\ G_0) \to \pi_n(X,\ x_0)$$

なる一つの同型対応 p_* を与える。

又 ξ は

$$\pi_{n-1}(G,\ e) \to \pi_{n-1}(G_0,\ e_0)$$

なる同型対応 ξ_* を与える。

$\xi_*^{-1}\partial(p_*^{-1})$ は準同型対応

$\kappa_n:\ \pi_n(X,\ x_0) \to \pi_{n-1}(G,\ e)$　をきめる。但し ∂ は boundary operator.

4.　$\pi_1(X,\ x_0) \ni \alpha_1$,　$\pi_n(X,\ x_0) \ni \alpha_n$ のとき

$$\alpha_1 \circ \alpha_n \in \pi_n(X,\ x_0)$$

を次の如く定義する。

先ず　$I^n = \{t \mid t = (t_1,\ t_2, \cdots\cdots, t_n),\ \ 0 \leqq t_i \leqq 1\}$

$$\dot{I}^n = \{t \mid t = (t_1,\ t_2, \cdots\cdots, t_n),\ \ \prod_{i=1}^{n} t_i(1-t_i) = 0\}$$

$$J^{n-1} = \{t \mid t = (t_1,\ t_2, \cdots\cdots, t_n),\ \ \prod_{i=1}^{n-1}(1-t_n)t_i(1-t_i) = 0\}$$

とおき、

α_1 を表わす道を　$C(t):\ I^1 \to X,$

α_n を表わす写像を　$f:\ (I^n,\ \dot{I}^n) \to (X,\ x_0)$

とする。

次に写像 $f':I^n \to X$ を次の如く定義する。

$\frac{1}{4} \leqq t_i \leqq \frac{3}{4}$　$(i = 1,\ 2, \cdots\cdots, n)$ では $f'(t) = f(2t_1 - \frac{1}{2}, \cdots\cdots, 2t_n - \frac{1}{2})$

その他の点では　$f'(t) = C(4\max_i |\frac{1}{2} - t_i| - 1)$

とおく。

明らかに　$f'(\dot{I}^n)=C(1)=x_0$

故に f' は $\pi_n(X, x_0)$ の要素を表わす。

それを　$\alpha_1\circ\alpha_n$　とかく。

5. $p_*^{-1}(\alpha_n)\in\pi_n(B, G_0, e_0)$ を表わす一つの写像を $\bar{f}$ とすると

$$\bar{f}(J^{n-1})=e_0,\quad \bar{f}(I^{n-1})\subset G_0,\quad \bar{f}(I^n)\subset B,$$

$$p\cdot\bar{f}(t)=f(t)\qquad (t\in I^n)$$

である。

同様な f' に対する写像 $\bar{f}'$ を次の如く定義する。

$\frac{1}{4}\leqq t_i\leqq\frac{3}{4}$ では　$\bar{f}'(t)=f'(2t_1-\frac{1}{2},\cdots\cdots,2t_n-\frac{1}{2})$

その他の点では　$\bar{f}'(t)=h_{4s-1}\xi^{-1}(t')$

とおく、但し　$s=max|\frac{1}{2}-t_i|$ で t' は t と $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\cdots\cdots,\frac{1}{2})$

を結ぶ線分と $\{t|\ max|\frac{1}{2}-t_i|=\frac{1}{4}\}$ の交点を表わす。

$$h_1\ \xi^{-1}(e_0)=e_1$$

とおくと J^{n-1} 上の点では　$max|\frac{1}{2}-t_i|=\frac{1}{2}$ だから、

$$\bar{f}'(J^{n-1})=h_1\xi^{-1}(e_0)=e_1\in G_0,$$

$$\bar{f}'(I^{n-1})=h_1\xi^{-1}(G_0)\subset G_0,$$

$$p\bar{f}'=f'$$

が成立つ。

6. $g\in G$ を任意の要素とする。

$\pi_{n-1}(G, e)\ni\beta$ を表わす写像を $\varphi: I^{n-1}\to G$ とすると、

$$t\to g\cdot\varphi(t)\cdot g^{-1}$$

により $I^{n-1}\to G$ なる写像を得る。

それを

$$g\circ\varphi$$

と書くと、

$$g\circ\varphi(\dot{I}^{n-1})=g\cdot e\cdot g^{-1}=e$$

である。

従つて $g\circ\varphi$ は $\pi_{n-1}(G, e)$ の要素である。

之は $\eta(g)$ に関聯して定まるから

$$\eta(g)\circ\beta$$

とかいてよい。(N. Steenrod の p. 89)

7. 定理　写像 $\bar{f}:(I^n, I^{n-1}, J^{n-1})\to(B, G_0, G_0)$ に対し次の条件を充たす写像 $f_1:(I^n,I^{n-1}, J^{n-1})\to(B, G_0, e_1^{-1})$ が存在する。

1)　$p\tilde{f}(t)=p\tilde{f}_1(t)$

2)　$\dot{I}\ni t$ なら　$\tilde{f}_1(t)=\xi(\xi^{-1}(f(t))\cdot g^{-1})$

但し　$e_1^{-1}=\xi(\xi(e_1)^{-1})$

$\xi(e_1)^{-1}=g^{-1}$

証　明

$I^n\ni t$ とし、

$p\cdot\tilde{f}(t)$ 上のファイバーを G_t,

$G\to G_t$ なる任意の admissible map を ξ_t とする。

ξ'_t を他の admissible map とし、$\xi'_t{}^{-1}\xi_t$ の表わす G の要素を g' とすれば、

$$\xi'_t{}^{-1}\xi_t(\xi_t{}^{-1}(\tilde{f}(t))\cdot g^{-1})=g'\cdot(\xi_t{}^{-1}(\tilde{f}(t))\cdot g^{-1})$$
$$=(g'\cdot\xi_t{}^{-1}(\tilde{f}(t)))\cdot g^{-1}=\xi'_t{}^{-1}(\tilde{f}(t))\cdot g^{-1}.$$

故に

$$\xi'_t(\xi'_t{}^{-1}(\tilde{f}(t))\cdot g^{-1})=\xi_t(\xi_t{}^{-1}(\tilde{f}(t))\cdot g^{-1}).$$

故に $f_1 : t\to\xi_t(\xi_t{}^{-1}(\tilde{f}(t))\cdot g^{-1})$ は ξ_t のとり方に無関係であり従つて連続である。
明らかに $\tilde{f}_1$ は与えられた条件 1), 2) を充たす。

8.　写像 $\tilde{f} : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1})\to(B, G_0, e_0)$ を次の如く定義する。

$\frac{1}{4}\leqq t_i\leqq\frac{3}{4}$ では、$\tilde{f}(t)=\tilde{f}^1(2t_1-\frac{1}{2},\cdots\cdots,2t_n-\frac{1}{2}$

その他の点では、　$s=max|\frac{1}{2}-t_i|$ とおくと

$$\tilde{f}(t)=h_{4s-1}(h^{-1}{}_{4s-1}(\tilde{f}'(t))g_0{}^{-1})$$

とする。

然らば $\tilde{f}(t)$ は次の条件を充たすことが容易に知られる。

1)　$\tilde{f}(t)$ は連続

2)　$\dot{I}^{n-1}\ni t$ なら $\tilde{f}(t)\in G_0$

$J^{n-1}\ni t$ なら $\tilde{f}(t)=e_9$

3)　$max\,|\frac{1}{2}-t_i|=\frac{1}{4}$　では $\tilde{f}(t)=\xi(\xi^{-1}(e_0)g_0{}^{-1})=\xi(g_0{}^{-1})=e_1{}^{-1}$

4)　$p\tilde{f}(t)=p\tilde{f}'(t)=f'(t)$

9.　定理　$\kappa_n(\alpha_1\circ\alpha_n)=\kappa_1(\alpha_1)\circ\kappa_n(\alpha_n)$　　$n\geqq 2.$

証明　$\alpha_1\circ\alpha_n$ は f' で表わされる。

$$p\tilde{f}(\dot{I}_n)=f'(\dot{I}^n).$$

従つて $\kappa_n(\alpha_1\circ\alpha_n)$ は $\xi^{-1}\tilde{f}(\dot{I}^n)$ で表わされる。
然るに 2~8 により之は $\kappa_1(\alpha_1)\circ\kappa_n(\alpha_n)$ を表わす。よつて定理は証明された。