



半固定端における横波の反射

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2008-05-21 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 高橋, 成和 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.32150/00005089

半固定端における横波の反射

高橋 成和

北海道教育大学函館校理科教育研究室

1 研究の目的

高校物理における「波動」の学習は、平成15年度から実施される新学習指導要領¹⁾によると、これに関わる現象について実験・観察を通して探究し、基本的な概念や法則を理解させ、日常生活と関連づけて考察できるようになることを目標にしている。現行の学習指導要領²⁾、また教科書³⁾を見ると、この単元の内容は波の発生にはじまり、独立性と重ね合わせに続き、波の反射から定常波へと進む。この「波の反射」はロープや波動すだれ、あるいはつる巻きばねを用いて固定端と自由端における現象を扱っている。すなわち、山形や谷形のパルス波について、「固定端では入射波の山が谷に、谷が山になって反射し、自由端では入射波の山が山に、谷が谷のままで反射する」ことを実験事実として述べている。しかし、この理由については触れていない。

ここで理由づけを不問にすることは、学習者の知的好奇心の誘発に不興を、また論理的思考の育成に不備を起しかねない。この解消に、指導上の補填が必要となる。ただし、この実験結果の分析と解釈、法則性の発見などの物理的探究を生徒に委ね、問題解決の喜びを味わわす教育上の配慮も必要である。

ともあれ、この実験結果への解釈は、モデルを使った説明法⁴⁾もあるが、次のような思考の過程をたどるのが一般的であろう。すなわち、横波を伝える弦について、その端が固定されており、そこでの入射波と反射波を合成した波の変位を0に保持するには、反射波の変位は入射波の変位と常

に大きさが等しく、符号が反対でなければならない。このために、反射波は入射波と固定端に関して「点対称」になる。また自由であるときは、弦の端に変位方向の力が加わらず、仕事をしない条件を必要とする。このため入射波と反射波を合成した波形の傾きは、いつも0（変位の向きと直交する）でなければならない。このためには、入射波と反射波の端における形の傾きが逆（正と負）になればよく、互いの波形は自由端に関して「線対称」になる。以上のような「点対称・線対称」の表現法は、山形や谷形のパルス波のみならず、三角波や正弦波などの波形は勿論のこと、とくにステップ波についても適用でき、「山・谷」の表現法より一般化されていよう。

ところで、一般化の観点からすると、自由端と固定端での反射は特例といえる。すなわち、現実にはこの中間の状態もあり、また反射の現象を総体して考えるならば、「動けるが完全には自由でない、半固定端での反射」も検討すべきである。なぜならば、このことが新指導要領がいう①音や光または水波などの日常生活の中で起こる波の現象⁵⁾の一つの姿であり、②生徒の発展的な探究活動⁶⁾や課題研究⁷⁾の題材となりうると考えられること、併せて③指導者としての素養を高めることになるからである。

これらのことを鑑みて本研究は、上で指摘した検討を課題に据え、次の3点を目的とした。

- ① 弦を伝える横波の、自由端から固定端に至る段階を間欠的に追った半固定端における反射を具現する
- ② 指導上の参考資料として、波動方程式の解

とその教値計算の結果を求める

- ③ この反射について、高校物理の学習範囲で定量化した理論上の検討が可能であるかを調べる

これらを遂行するうえで、固定端は質量が無量大の重りをもつ、自由端は質量が0の重りをもつ弦の端と仮想する。そこで問題とする半固定端は任意の質量をもつ重りがついた弦の端と考え、ここでの課題に取り組むことにする。

2 波の観測方法

弦の上に波を起し、その波が弦の端にある重りで反射する姿を観測することは、次の方法で行なった。

A 現象を起こす方法

A-1 波を伝える媒体

弦には衣服用のゴムひもを用いた。これは直径2.3 mmの円形断面をもち、外部を葛編みした白糸で被覆し、内部を0.8 mmのゴムひも4本で構成している。無荷重における長さが $L=50\text{ cm}$ のゴムひもについて、張力 T と伸び ΔL の関係を図1に示す。このゴムひもは0~140 gwの範囲で6%程度しか伸びず、180~360 gwの範囲で直線関係にある。このバネ定数は5.2 gw/cmである。さらに荷重を増し、400 gwにすると2倍に伸び、つづいて飽和状態へと移行する。また線密度は無荷重で

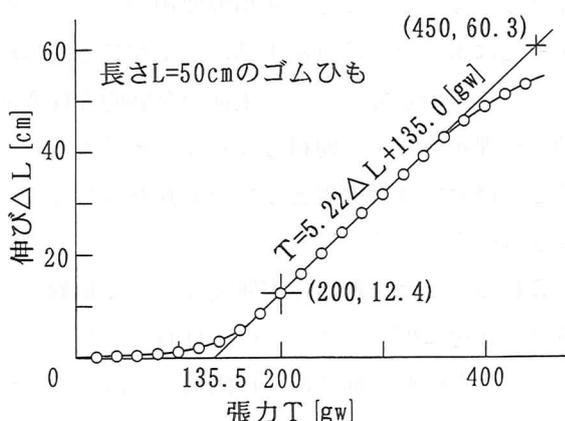


図1 波を伝える媒体として使用したゴムひもについて、長さ50cm分の弾性。張力200gwで使用した。

$\rho=0.0385\text{ g/cm}$ 、張力200 gwで $\rho=0.0309\text{ g/cm}$ である。

図2に示すように、このゴムひもを床からの高さが4 mの天井から鉛直に吊して、下端に波を反射させる重りをつける。これに張力を加えるために、重りの下に直径0.03 mm、線密度 $1.3 \times 10^{-4}\text{ g/cm}$ 、長さ200 cmの黒色の釣り糸をつけ、200 gwの分銅をつり下げる。このとき、重りが観測者の目線の高さになるようにゴムひもの長さを調節した。これでゴムひもの長さはおよそ160 cmとなり、そこを伝わる波の速さ V は、重りによる荷重は無視できて $V=\sqrt{200 \times 980 / 0.0309} = 2.5 \times 10^3\text{ cm/s}$ となる。

A-2 波を発生させる装置

本研究においては、理論的な取扱を簡単にするために、二等辺三角形パルス波の発生を試みた。そこでまず、重りからおよそ50 cm上方にあるゴムひもの2点A、Bを右へ水平に、それらの中央Mを左へ水平に、細くて軽い糸で引きゴムひも

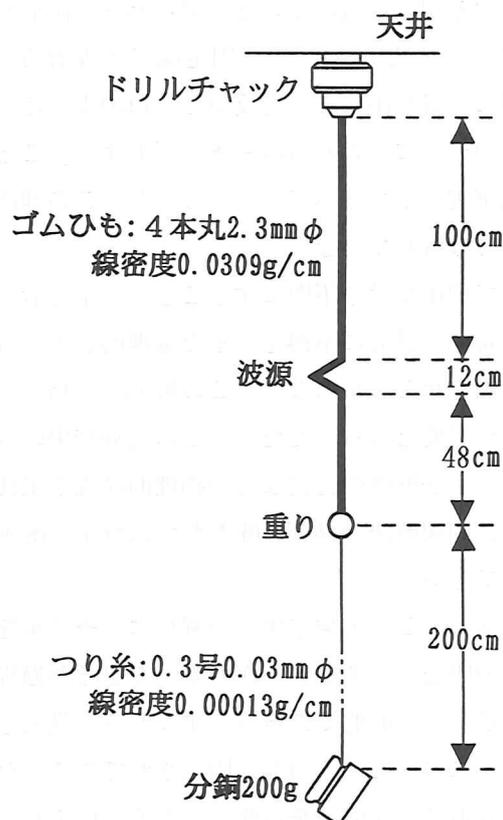


図2 ギュムひもの張りかたと概略の寸法

が二等辺三角形AMBの二つの等辺を構成するようにする。このとき、他の部分のゴムひもが鉛直線上にあるように、3点AMBの引き加減を調節し、底辺12 cm、高さ9 cmにする。

次にこれら3点を同時に開放すると、二等辺三角形AMBは底辺 $a=12$ cm、高さ $h=4.5$ cmの二つの三角形パルス波に分かれ、ゴムひもを上下に伝わる。この中で、下方に伝わる波を使って重りでの反射波を観測する計画をもった。

このとき3点AMBの開放は、 10^{-4} s程度の瞬時性をもって同時に行なう必要がある。そこで右へ引くA、Bからのひもは滑車を介して左へ向きを変え、Mからのひもと一体にしておき、一緒に引き、そして開放した。この装置を図3、4に示す。ところが現実には発生した波は、ゴムひものしなやかさの不足から三角形の角が取れ、山形のパルス波になってしまった。この波が発生する様子を図5に示す。

A-3 波を反射させる重り

5種類の重りを使用した。その材質と質量は、ビニール管0.09 g、プラスチック球0.25 g、真鍮管0.64 g、鉛球1.16 gと6.89 gである。これらのゴムひもへの固定は、重りの中央に開けた孔にゴムひもの端を通し、これに続く釣り糸と共に、接着剤で行なった。

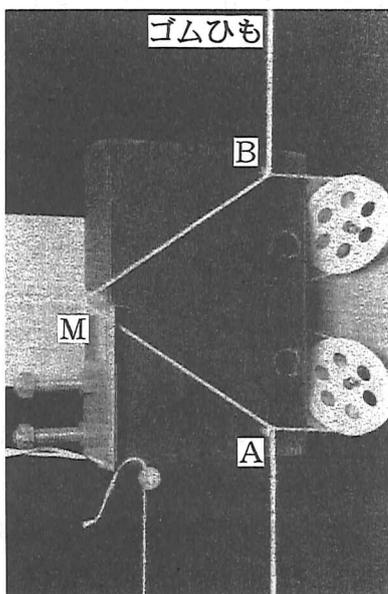


図3 波を発生させる装置（前面）

B 現象を捉える方法

B-1 ストロボ発光の時間制御

波の運動を観測する一つの方法は、それを駒落としての写真に撮影することである。これを行なうためには、波の発生から波が重りに達し反射する前後までの時間を待機し、観測する望みの瞬間にストロボ用キセノン灯を発光する必要がある。この制御を実行開始するためのトリガー信号は、波の発生時において点Mのゴムひもが開放されたときにアルミニウムリボンを切断することで得た。この方法を図6に示す。

この切断は電氣的OFF信号で、RSフリップ・フロップ回路をセット状態にしマルチバイブレーター発振回路を駆動させる。この発振周波数は500 K Ω の可変抵抗器で変えられるようにして1.3 Hz~1 KHzを得た。ここでは800 Hzを使用した。これをICでゲート信号と混合し、ゲート期間中だけ発振周波数を通過させ、この信号をR-Cで100 μ sのパルス幅にし、バッファアンプを通して、6~30 vP-Pのストロボスコープ起動信号とした⁸⁾。

B-2 写真撮影のための背景

波形を撮影した写真が鮮明であるためには、撮影時の背景が暗黒でなければならない。すなわちストロボ光のゴムひもによる反射光だけをカメラレンズが捉え、不要な背景からの光を遮断する必要がある。そのため室は暗室にして、ゴムひもの背後に奥が挟まった衝立てを設置した。この寸法は楔角60度、間口100 cm、奥行70 cm、高さ2 mで

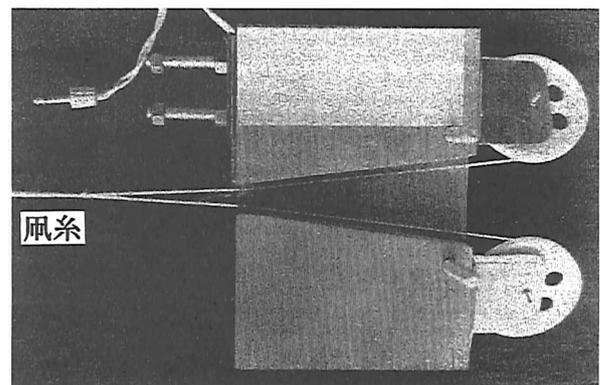


図4 波を発生させる装置（裏面）

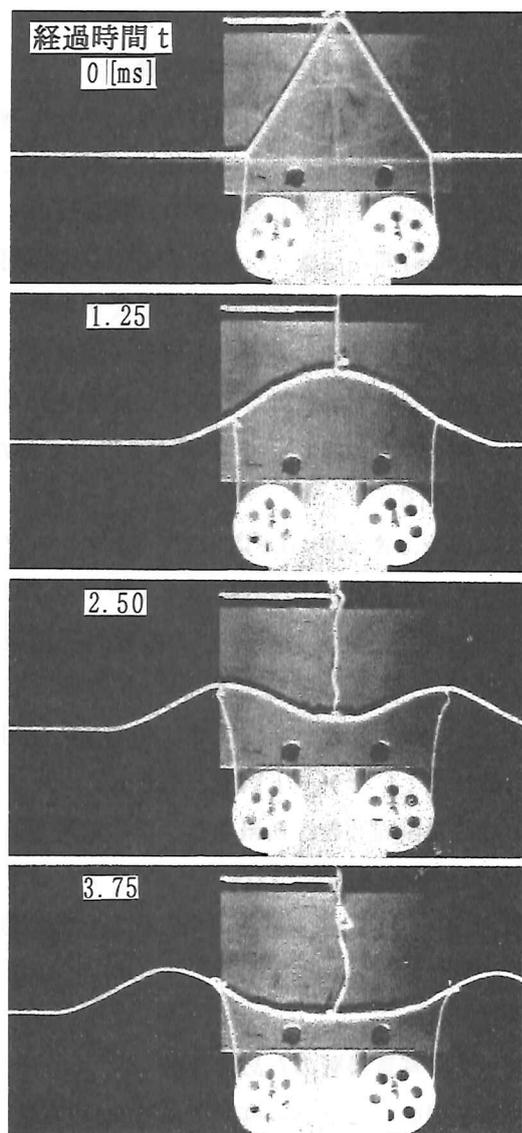


図5 山形パルス波が発生する様子（上から経過時間 0, 1.25, 2.50, 3.75 ms）

あり、合板製である。この内面に炭素粉末を塗布し、入射光の反射を阻止した。また、2 cm 間隔に白糸を張って作った方眼をゴムひもに近接してその背後に置いた。波が発生する直前における写真撮影の準備を整えた波源・ゴムひも・重り・釣り糸・方眼の配置状況を図7に示す。

B-3 撮影と現像の条件

写真撮影はF 2.8-55 mm レンズを持つカメラにより、ASA400 ネオパン35 mm フィルム上に絞り開放、被写体との距離1 mで行なった。このとき、ストロボ光は重りの下方前方よりゴムひもを照明した。現像はパンドールにより行い、8倍の増感を施した。

3 観測の結果とその考察

入射波が、代表例として、質量 $m=0.25\text{g}$ の重りに達し反射するとき、その前後における波の形状を図8に示す。最上段の写真は、波の発生開始の点Aから48 cm離れた重りに達する直前の入射波である。続く7枚は、1/800秒ごとの間欠的に撮影した入射波と反射波の合成波で、この下の3枚は反射波のみを示している。

最下段の写真によると反射波は、谷形が先行しつつ山形となって、その裾が広がっている。これは、まず重りが入射波の到来に伴った動きができず固定端に準じた挙動を行い、つづいて全く自由である運動とはいかないが、重りに変位が起こり自由端に準じた振る舞いを成し、入射波が無くなってもその変位が残っていることを意味している。

重りの質量 m による反射波の違いを、図9に示す。これは、図8の最下段の写真と波の発生からの時間が同じである。最上段は重りがない $m=0$ の場合であり、自由端での反射に相当する。しかし波尾の変位が0より下方にあり、波頭につづく前側をしめる部分の変位が図8の最上段に示されている入射波と比べて3割程度減少している。これらは、釣り糸への波の透過が大きいこと、しかもこれが分銅で反射して戻って波尾に影響している可能性がある。この戻りを避けるため、分銅を床面の近くに設置し、重りから分銅までの距離を200 cm 離したが、まだこの影響が残っているようである。因みに釣り糸の線密度からして波が伝わる速さは、ゴムひもの10倍である。

最下段は $m=6.89\text{g}$ 、すなわちゴムひもの密度 ρ に対する比が $m/\rho=223\text{cm}$ の場合である。これには、重りに回転運動が見られ、この回転に伴い発生した波が混在している。このことは、とくに波の後側にあらわれている。この変位を差し引くと、この反射は固定端での反射に近い。

$m/\rho=3\text{cm}$ である2段目の反射波には、すでに波頭に谷の、波尾に裾のきざしがある。このような軽い重りでも、なかなか元に復すことができ

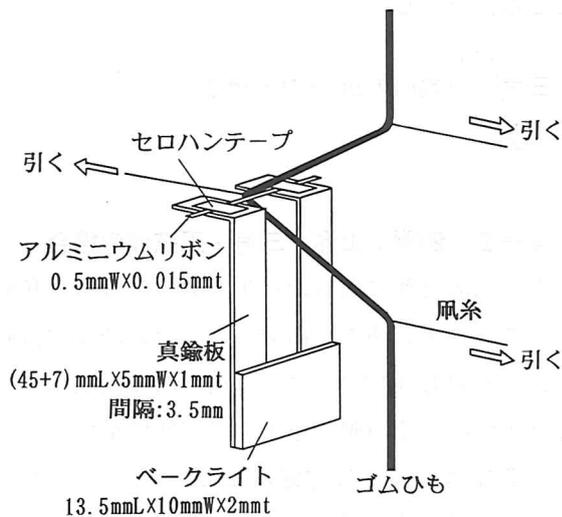


図6 写真撮影のストロボ光を発光させる時間制御トリガースイッチ：波の発生開始と共にアルミニウムリボンがゴムひもが切る

ないことを物語っていよう。また $m/\rho = 30 \text{ cm}$ を越えた下から2段目の反射波も、重りの変位が入射波の消滅後に残り裾が広がっており、重りは固定端になりえていない。これらの結果は、次の理論によって、さらに明らかになる。

4 解析による検討

4-1 一般論：波動方程式の解

弦の線密度を ρ 、張力 T として、重り（質点とみなす）の質量を m とする。また、初めに重りがある位置を原点とし、弦に沿って X 軸を、その正方向から入射波の先端が重りに達した時点をもとに時間 t をとる。入射波、反射波の変位を I 、 R とし、これらが小さく、波が伝わる速さを V とすれば、波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$$

である。この特解として

$$I = A \exp i\alpha (Vt + x)$$

$$R = B \exp i\alpha (Vt - x)$$

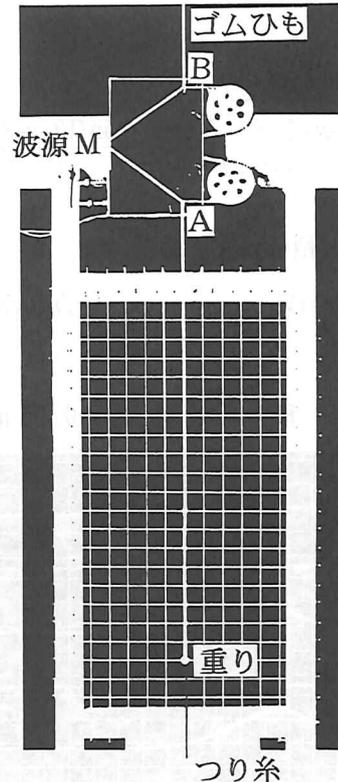


図7 観測開始前における装置の配置状況

が与えられる。入射波と反射波を合成した波による重りの運動方程式は

$$T \frac{\partial (I+R)}{\partial x} = m \frac{\partial^2 (I+R)}{\partial t^2} \quad : x=0$$

である。これに特解を代入すると

$$B = \left[-1 + \frac{2 - 2(\alpha V^2 m / \rho) i}{1 + (\alpha V^2 m / \rho)^2} \right] A$$

となる。入射波の一般解はフーリエ積分を用いて

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty A \exp i\alpha (Vt + x - \xi) d\xi d\alpha$$

とかけると。また、初めの入射波を

$$I = f(x) : t=0$$

とすれば、これら2式から

$$A = f(\xi) \exp(-f\alpha\xi)$$

故に、一般解に代入して、実数部を Re で表すと

$$I = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi) \exp i\alpha (Vt + x - \xi) d\xi d\alpha = f(Vt + x)$$

同様に反射波は、

$$R = -f(Vt-x) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi) \times \frac{\cos \alpha (Vt-x-\xi) + (\alpha V^2 m / \rho) \sin(Vt-x-\xi)}{1 + (\alpha V^2 m / \rho)^2} d\xi d\alpha$$

$V = \sqrt{T/\rho}$ と積分公式⁹⁾を用いて

$$R = \begin{cases} Vt-x \geq 0: -f(Vt-x) + 2\rho/m \exp(-\rho/m(Vt-x)) \times \Xi \\ Vt-x < 0: 0 \end{cases}$$

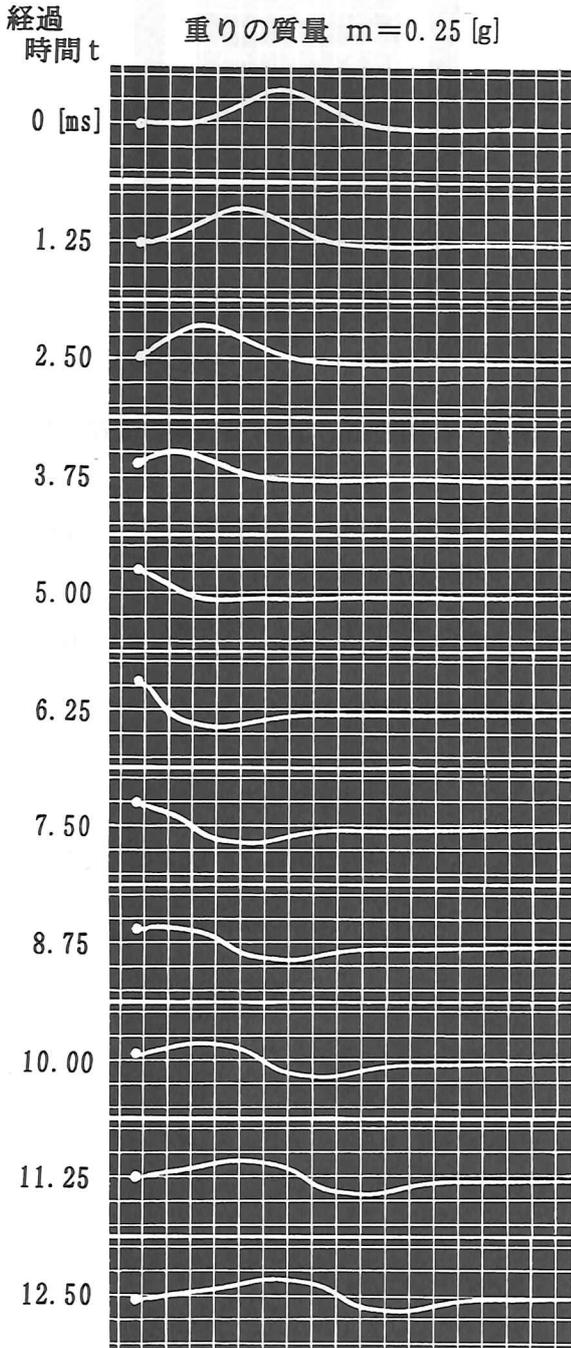


図8 0.25gの重りにおける、山形パルス波の反射。最上段の姿が入射波、最下段の姿が反射波。

となる。ただし

$$\Xi = \int_0^{Vt-x} \exp(\rho/m) \xi f(\xi) d\xi$$

である。

4-2 例題：山形・三角・正弦波の場合

上で求めた解に山形のパルス波、二等辺三角形パルス波、正弦波を適用すると、その結果は位置 x と波の移動距離 Vt により分別される領域によって分かれる。この領域を表1の左列に示す。

ここでは実験との対応のために、 $t=0$ における入射波である山形のパルス波を

$$f(x) = (1/2)h [1 - \cos(\pi/a)x]$$

とおいて計算する。これを一般解に代入すると、

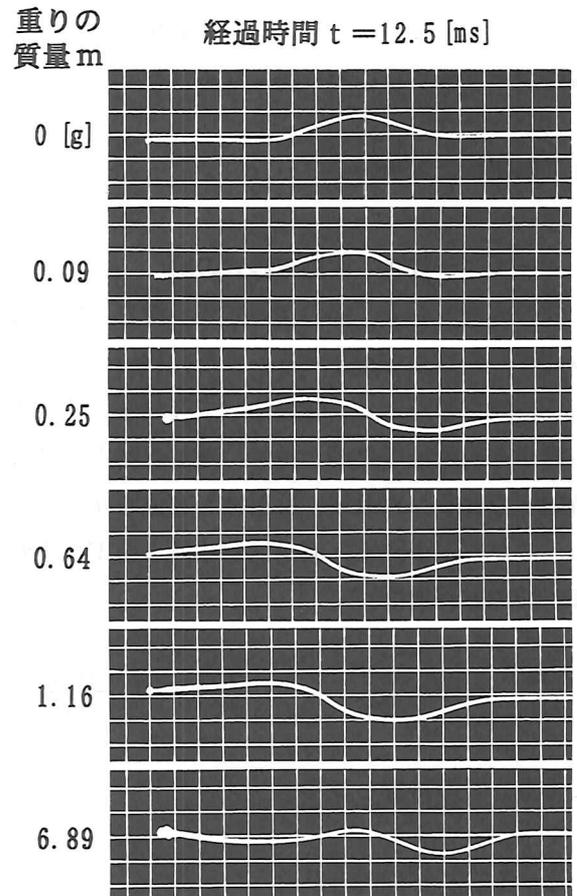
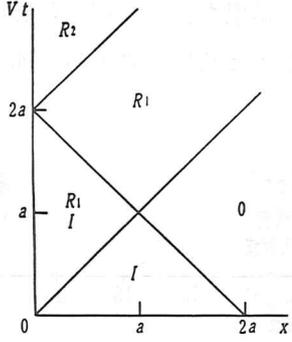
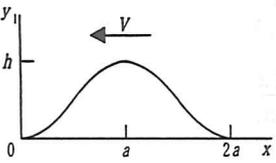
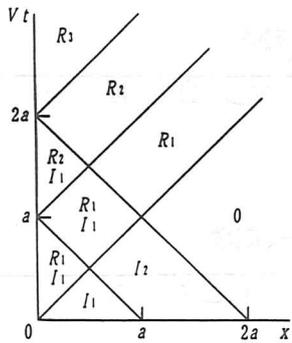
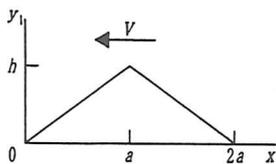
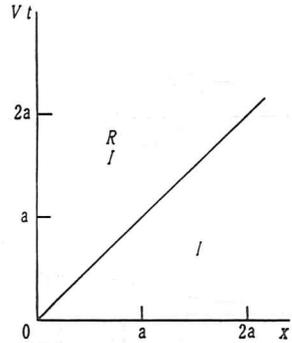
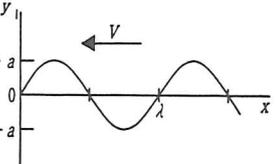


図9 自由端（最上段）と5種の重りによる山形パルス波の反射波

表1 入射波と重りによる反射波の解析結果

	分類領域	入射波 I	反射波 R
山形パルス波		$I = - \left[1 - \cos \frac{\pi}{a} (Vt + x) \right]$ 	$R_1 = \frac{h}{2} \left[1 + \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \cos(MX) - \frac{2K}{K^2 + 1} \sin(MX) - \frac{2K^2}{K^2 + 1} EX \right]$ $R_2 = \frac{h}{2} \frac{2K^2}{K^2 + 1} [(EA)^2 - 1] \cdot EX$ $K = \frac{\pi m}{a \rho} \quad MX = \frac{\pi}{a} (Vt - x)$ $EX = \exp\left(-\frac{\rho}{m} (Vt - x)\right)$ $EA = \exp\left(\frac{\rho}{m} a\right)$
二等辺三角形パルス波		$I_1 = \frac{h}{a} (Vt + x)$ $I_2 = 2h - \frac{h}{a} (Vt + x)$ 	$R_1 = MX + K(EX - 1)$ $R_2 = 2h - MX + K(EX(1 - 2EA) + 1)$ $R_3 = K \cdot EX \cdot (EA - 1)^2$ $K = \frac{2h}{a} \frac{m}{\rho}$ $MX = \frac{h}{a} (Vt - x)$ $EX = \exp\left(-\frac{\rho}{m} (Vt - x)\right)$ $EA = \exp\left(\frac{\rho}{m} a\right)$
正弦波		$I = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (Vt + x)$ 	$R = \frac{a}{1 + K^2} [(K^2 - 1) \sin(MX) - 2K \cos(MX) + 2K \cdot EX]$ $K = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\rho}{m}$ $MX = \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x)$ $EX = \exp\left(-\frac{\rho}{m} (Vt - x)\right)$

結果は

$$I = \frac{h}{2} [1 - \cos \frac{\pi}{a} (Vt+x)]$$

$$R=0 \quad : \quad Vt-x \leq 0$$

$$R = \frac{h}{2} [1 + \frac{(m\pi/\rho a)^2 - 1}{(m\pi/\rho a)^2 + 1} \cos \frac{\pi}{a} (Vt-x) - 2 \frac{(m\pi/\rho a)}{(m\pi/\rho a)^2 + 1} \sin \frac{\pi}{a} (Vt-x)]$$

$$-2 \frac{(m\pi/\rho a)^2}{(m\pi/\rho a)^2 + 1} \exp\{-\frac{d}{m} (Vt-x)\}]$$

$$: 0 \leq Vt-x \leq 2a$$

$$R = \frac{h}{2} [2 \frac{(m\pi/\rho a)^2}{(m\pi/\rho a)^2 + 1} + 1] [\exp(2\rho a/m) - 1]$$

$$\times \exp\{-\frac{\rho}{m} (Vt-x)\} \quad : Vt-x \geq 2a$$

となる。この結果を、二等辺三角形パルス波および正弦波の結果と共に、表1の右列にまとめておく。

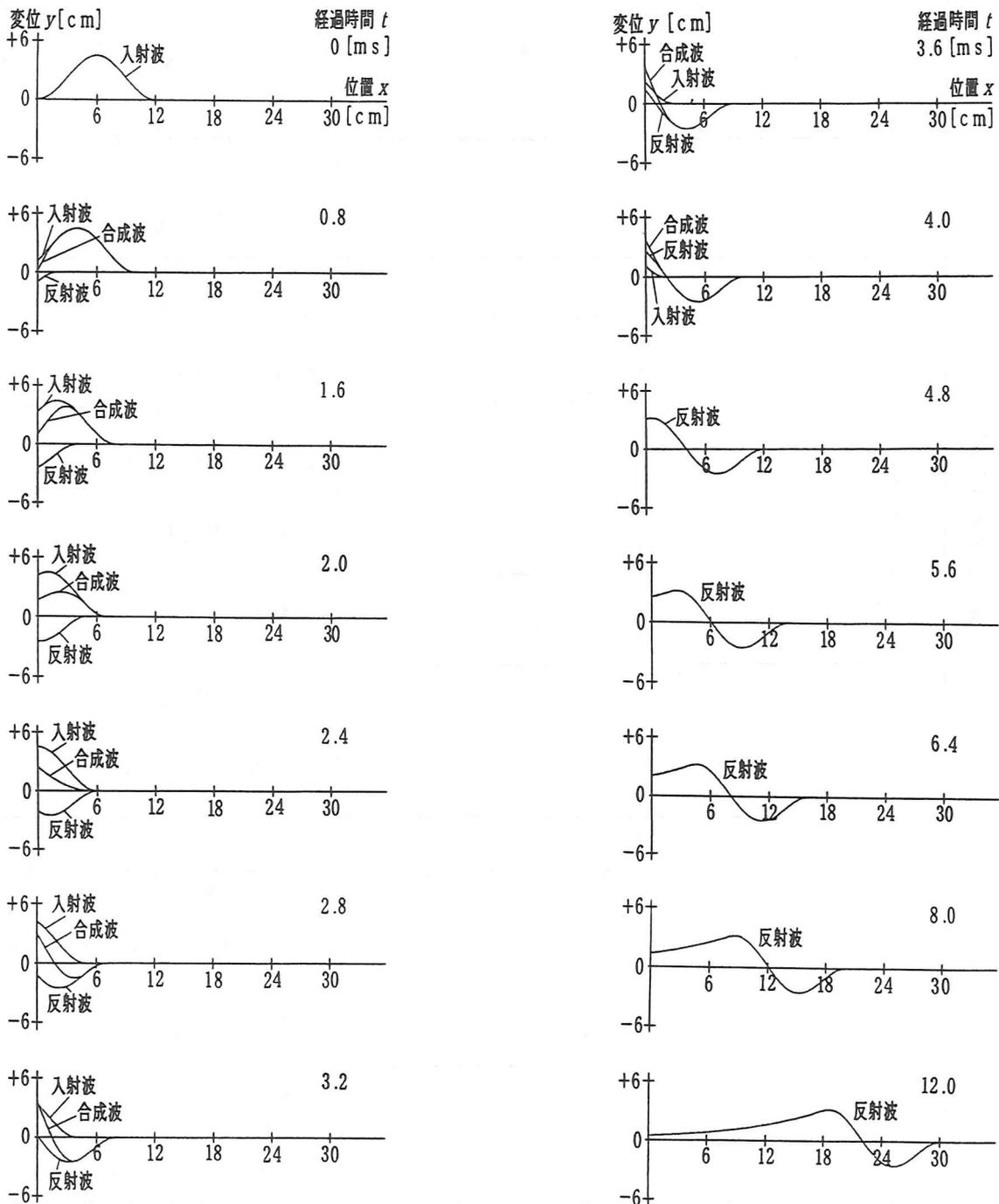


図10 0.25gの重りにおける山形パルス波の反射 (理論計算による)

弦の張力、線密度は実験条件と同じ $T=200\text{ gw}$, $\rho=0.309\text{ g/cm}$ とし、横波が伝わる速さを $V=2.5 \times 10^3\text{ cm/s}$ とする。入射波の底面は $2a=12\text{ cm}$, 高さは $h=4.5\text{ cm}$ とおく。これが弦の端にある質量 $m=0.25\text{ g}$ の重りに入射するとき、入射波、反射波、合成波の挙動を計算すると、図10に示す結果になった。二等辺三角形パルス波と正弦波については付録に示す。

この結果は図8に示した観測結果と、時間経過に伴う波形の変化において、大変よい一致を示している。しかし、同じ波形を示すまでの経過時間が計算に比べて実測の方が長くかかっている。例えば計算による図10の左列第5段目の波形は、観測による図8の第5段目の波形に対応している。前者は、入射波の波頭が重りに達した第1段目から 2.4 ms 後である。しかし後者は、第2段目で入射波の波の先端が重りに達したと見ても、そこから、 $5.00-1.25=3.75\text{ ms}$ もかかっている。この不一致は、ゴムひものしなやかさに関わる内部摩擦が原因となり、現実の波が伝わる速さを遅くしたと考えられる。

次に、入射波が重りに達してから $t=14.4\text{ ms}$ を経過して、反射波のみになった状態を、重りの質量 m を助変数として図11に、またこの間に起こし

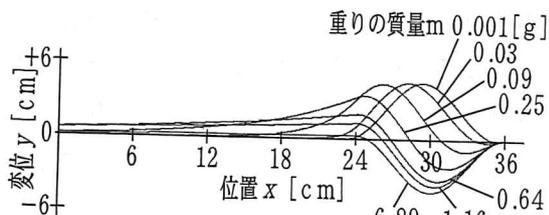


図11 各種の重りにおける山形パルス波の反射波形 (理論計算による)

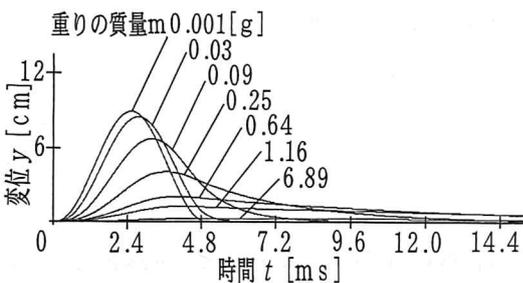


図12 各種の重りにおける山形パルス波の反射に伴う重りの変位

た重りの運動を図12に示す。

図11において、重りの質量が $m=0.001\text{ g}$ ($m/\rho=0.003\text{ cm}$) における反射波は、入射波と同じ形をしており、自由端の反射に相当する。しかし 0.03 g ($m/\rho=0.1\text{ cm}$) になると、すでに波頭に谷が現われ重りの慣性の影響が出だしている。このことは 0.09 g について明確となり、図9の観測でも確認できている。さらに 0.25 g になると、その慣性の影響が波頭・波尾の裾に現われている。質量 6.89 g ($m/\rho=223\text{ cm}$) の重りは変位がかなり小さく、固定端に近い状況にある。

5 高校物理への適用性：反射波形の作図

高校物理の学習範囲で、反射波形の作図が可能であろうか。また、この結果が解析の結果にどこまで迫ることができるであろうか。これらがこれからの課題である。簡単のため作図が線分のみで構成できるように、入射波形を山形パルス波に近い二等辺三角形のパルス波と設定して考える。

作図の手順を図13, 14に示す。前者は波形から重りに働く力を求めることを、後者はその力から重りの運動(変位)を求めること、そして両者にその変位から反射波形を作図することの要点を示してある。

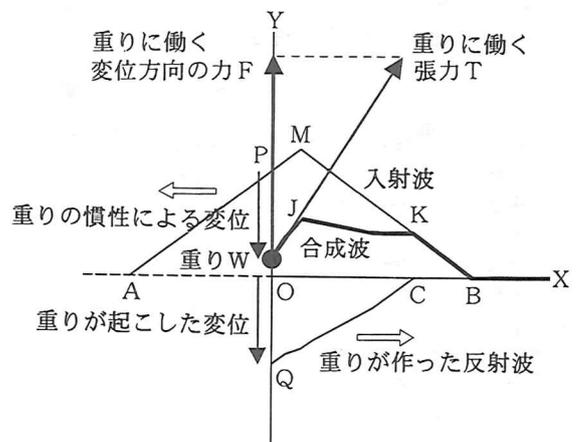


図13 重りにおける波の反射について、重りに働く力と、重りが起こす変位による反射波

まず、重りの運動を追跡する方法を考える。これは2階の常微分方程式である運動方程式で規定されるので、この数値解法はルンゲ・クッタ流のニーストロームの方法¹⁰⁾で行なえる。しかし高校生向けには、この方法を簡便化する必要がある。また、いまの高校物理の学習範囲では、加速度 a が一定である直線運動しか取り扱わない¹¹⁾ ことになっている。したがって、加速度が一定でない場合には時間間隔を短く分割し、この中での運動を求め、これを積み上げる必要がある。この積み上げには、簡便化した「蛙跳び法」¹²⁾ を用いる。時刻 $t=n\Delta t$ における加速度 a_n が分かるとする。ただし Δt は十分短い時間を選び、 $n=1, 2, 3, \dots$ である。このとき、時間 t_{n-1} から t_{n+1} の微小時間 $2\Delta t$ の間において a_n は一定であるとして、時刻 t_{n-1} における速さ V_{n-1} 、位置 x_{n-1} を基に時刻 t_{n+1} における速さ V_{n+1} 、位置 x_{n+1} を次式で求める。

$$V_{n+1} = V_{n-1} + a_n \cdot 2\Delta t,$$

$$x_{n+1} = x_{n-1} + V_{n-1} \cdot 2\Delta t + 1/2 \cdot a_n (2\Delta t)^2$$

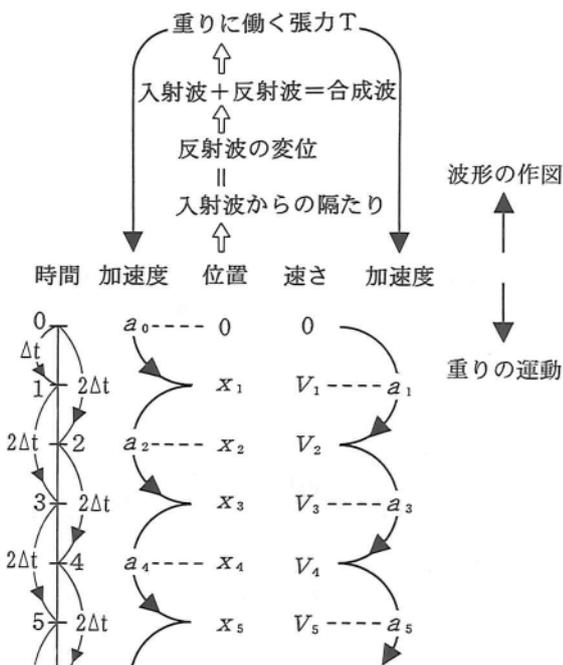


図14 重りにおける波の反射について、重りの運動を探る計算の方法（蛙跳び法）と反射波の形を作図する手順

いいかえれば、二つの時刻の中央における加速度 a_n を用いて、これが一定であるとして前後の時刻における位置・速さの関係から運動を探るのである。ただし、最初だけは $t_0=0$ の加速度 a_0 と位置 0 、速さ 0 を使って $t_1=\Delta t$ での位置、速さを求める。

次に、加速度 a_n は、運動の法則（運動方程式）から求める。すなわち、時刻 t_n における波形から、重りに働く張力 T が分かる。この値は波形を見ればゴムひもの端における伸びが分かるので、図1の張力との関係から算出する。すなわち、長さ、 $L=50\text{ cm}$ のゴムひもについて伸び ΔL と張力 T の関係は

$$T = 5.22\Delta L + 135.0 \text{ [gw]}$$

であるから、 200 g 分銅が釣り下げたあるゴムひもは、 50 cm の部分が $50+12.4=62.4\text{ cm}$ になっており、これの一部が m 倍の長さに伸びると張力は $\Delta L = 62.4m - 50$ を代入し、さらに単位の換算のため $9.8\text{ N}/1000\text{ g}$ を掛ければ

$$T = 3.19m - 1.23 \text{ [N]}$$

となる。この関係を用いて張力 T を算出する。重りの運動は、ゴムひもと垂直方向のみの変位を考えることにして、この方向の成分 F を求める。これで重りの変位方向の加速度 a_n が確定する。

以上のようにして、図13に示す t_{n+1} における重りの位置 W が定まる。このとき入射波の進行具合は分かっているので、ゴムひもの端における入射波の位置 P は定まる。ゴムひもの端は重りがなければ P にあるのだが、重りの慣性のために W にあり、重りが変位 PW を起こしたことになる。すなわち、ここに波の発生が起こり、この変位と等しい OQ が反射波を作ることになる。これと入射波とを合成すれば、観測する波が作図できる。

これらの手順を二等辺三角形パルス波に関し、底辺 $2a = 12\text{ cm}$ 、高さ $h = 4.5\text{ cm}$ 、波の速さ $V = 2500\text{ cm/s}$ とし、微小時間 $\Delta t = 1/5000\text{ s}$ の条件で実行した。この結果を図15に示す。

この作図の作業をしてみると、時刻の経過と共に重りの運動に関する計算に誤差が累積し、重りの位置が振動・発散していく状況に出会う。この

事情が図15における振動波形になって現われている。ここで太線は、この振動を平均化したものである。したがって、ここで示した時間を越えての作図は無意味となる。しかし、この二等辺三角形パルス波についての結果は、付録に示す解析結果

と共にこの図面の角を丸めて見れば、山形パルス波についての観測結果や解析の結果をよく反映している。このことから、高校物理の範囲で、半固定端である重りにおける反射を理論により検討することが可能であり、ここで示した方法の妥当性が保証できたといえる。

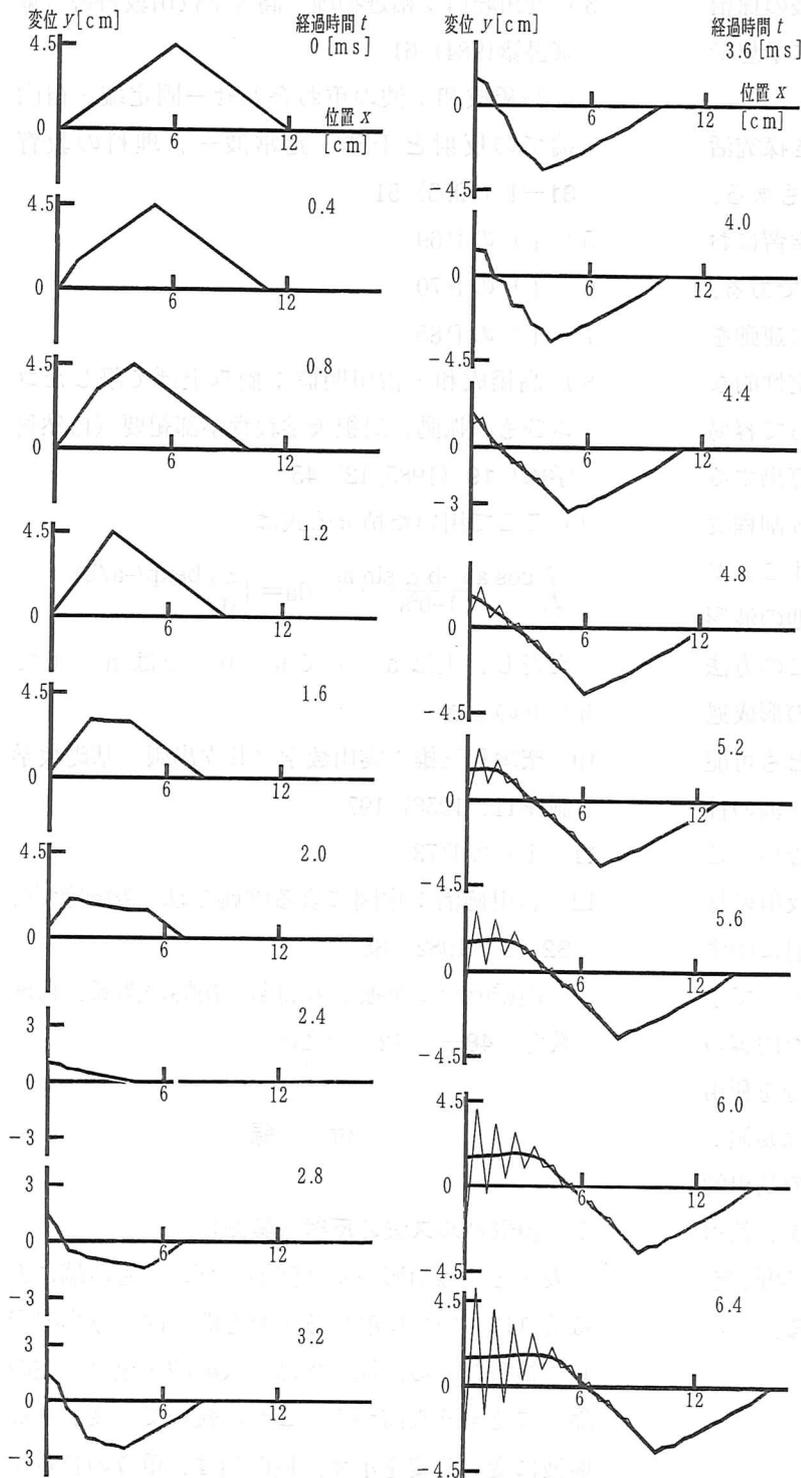


図15 高校物理の学習範囲で作図した、重りによる二等辺三角形パルス波の反射の様相

6 おわりに

山形パルス波をゴムひもに発生させ、この波をゴムひもの端にある重りにおいて反射させた。この反射の姿を、重りの質量を変えて観測した。併せて、この反射に関わる波動方程式と重りの運動方程式との解を求め、入射波・反射波・合成波を描き出した。これらの実測と解析の結果を比較すると、両者の波形には差がなかった。しかし同じ形に達するまでの所要時間が、前者は後者に比べて長かった。

また、高校物理の学習範囲で、二等辺三角形パルス波が重りにより反射する姿の作図を試みた。この方法はまず、蛙跳び法により重りの運動を追跡する。次にゴムひもの端における入射波形の位置から重りの位置までの変位を割り出す。この重りの変位から反射波を作る。これらの手順を踏んで、合成波を描き出した。この結果は、解析により描いた波形とよい対応を見せた。他に参考として付録に、山形のパルス波に関する一連の実測結果を、併せて二等辺三角形パルス波と正弦波についての解析結果を示してある。

以上のことを踏まえて、ここで扱った入射波に関する限りにおいて、重りによる波の反射を総体して見るとき、波を伝える弦の線密度 ρ と重りの質量 m の比が $m/\rho \leq 0.03\text{cm}$ において自由

端, $m/\rho \geq 300$ cm (4の最後で述べた, 223 cmを少し大きめに見積もった)において固定端とみなせよう. ただし m や m/ρ の値は, 波形の底辺 a や波長 λ により変わり, 理論の結果によると, これらが長いと比例して大きくなる. この中間である半固定端においては, 反射波は前側で固定端による反射波の, 後側で自由端による反射波の様相を呈する. このことは, 重りの慣性を基に予想できよう.

この予想することは, 課題意識につづき探究活動の基点であるので, 重要であり要点でもある. この視点に立つと, 高校物理のここでの学習において, 重りの運動を予想することは重要である. この予想は, 反射に伴う固定端と自由端の運動を認識していれば, 半固定端である重りの定性的な運動を予想し仮定することは学習者にとって容易であろう. すると彼らは, 重りの運動を算出する手間から開放され, 作図に要する時間が3割程度に短縮されて, 反射波・合成波を描き出すことが可能である. しかも三角波のみならず, 他の波形についても作図がしやすくなる. さらにこの方法ならば, 作図にコンピュータを用い, 波の形成過程と合わせ波に模倣的な動きを伴わせることも可能であり, 効果的である. これらのことは, 波の性質に関する学習の本質に何ら遜色を来さない. このようにして探究の過程を踏みながら, 反射の様子を描きだし, 半固定端における波の反射に関する問題の解決に至ることもできる. したがって学習指導の場面において, 本論文が紹介した内容の全てをたどる必要もない. このように部分を利用する過程も可能である. またこれで, 指導要領がいう指導上の留意点であるコンピュータの効果的な活用も図れる. いずれにしても本論文が, 教室での「波に関する探究活動」あるいは「課題研究」のよき参考になることを確信し, 期待する.

参考文献

- 1) 文部省: 高等学校学習指導要領解説 理科編 理数編 (大日本図書1999) 68
- 2) 文部省: 高等学校学習指導要領解説 理科編 理数編 (実教出版1989) 52
- 3) 近角聡信: 精選物理 高等学校用教科書 (東京書籍1984) 61
- 4) 高橋成和: 波の重ね合わせ一固定端・自由端での反射と干渉・定常波一, 理科の教育 31-1 (1983) 51
- 5) 1) の P 69
- 6) 1) の P 70
- 7) 1) の P 85
- 8) 高橋成和・古川明信: 摘み上げて離れたゴムひもの振動, 島根大学教育学部紀要 (自然科学編) 19 (1985/12) 45
- 9) ここで用いた積分公式は

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos a\alpha + b\alpha \sin a\alpha}{1+b^2\alpha^2} d\alpha = \begin{cases} \pi/b \exp(-a/b) \\ 0 \end{cases}$$
 ただし, 上は $a > 0$ で $b > 0$, 下は $a < 0$ で $b > 0$ のとき
- 10) 柴垣和三雄: 実用数学 (共立出版 基礎数学 講座11, 1958) 197
- 11) 1) の P 73
- 12) 石川徳治: 作図による蛙跳び法, 物理教育, 32-2 (1982) 85
高橋成和: 単振子の周期と振幅の関係, 物理教育, 48-3 (2000) 200

付録

1) 山形パルス波の反射 (実測)

表2と3は山形パルス波が, ゴムひもの端にある重りにおいて反射する全容を間欠的に写真撮影した結果である. 縦の列は, 入射波が重り (左の端) に達する直前から, これに続いて, 変形し反射波に変わる姿を示す. 横の列は, 重りの質量が異なる場合であり, 同じ時間を経過したときの波形である. 方眼の1目盛りは2 cmにあたる.

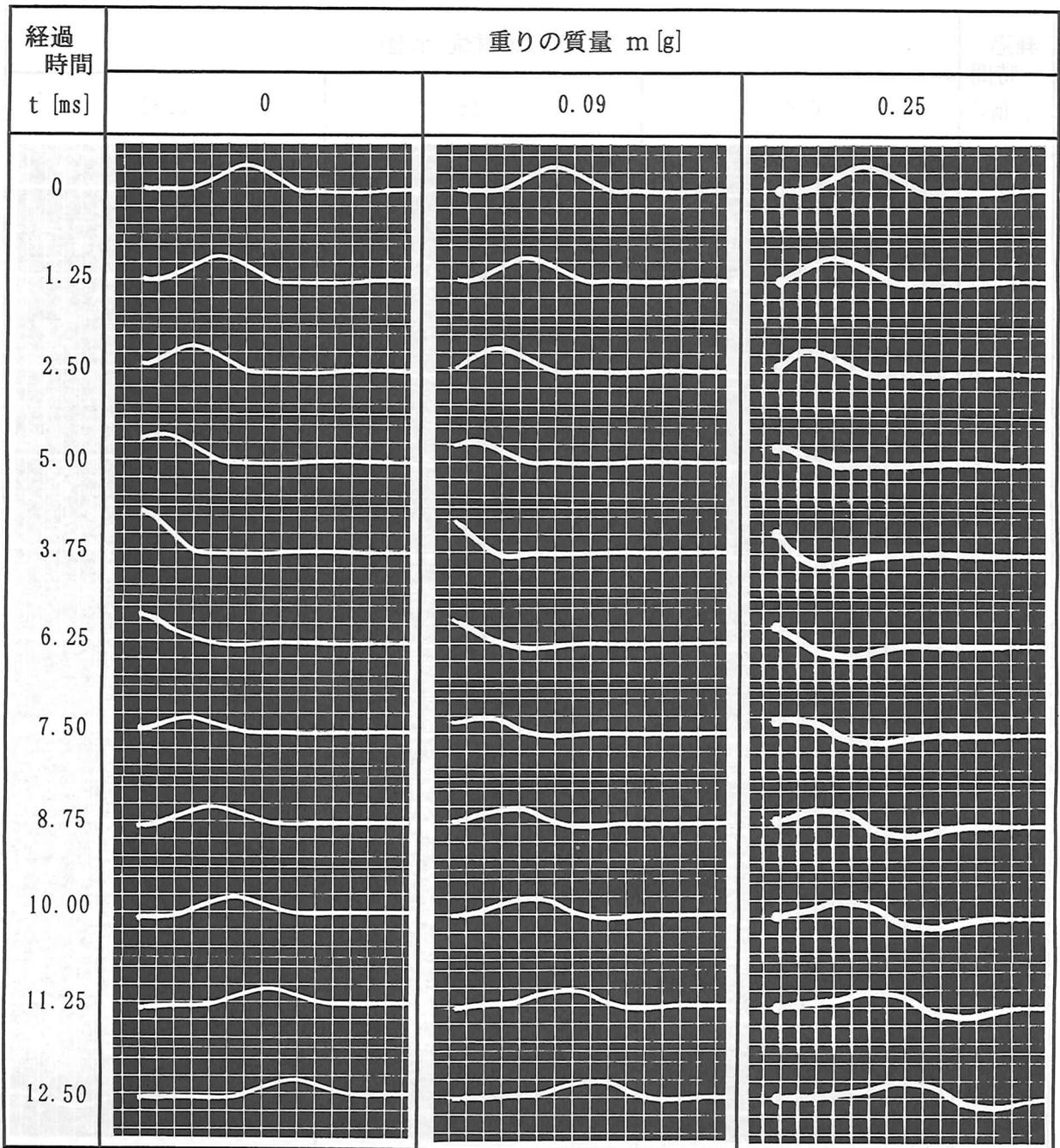
2) 山形パルス波の反射 (理論)

図16は、山形パルス波の反射の全容を理論により求めた結果である。上段から下段にむけて、重りの質量を大きくしている。各々の図において縦軸は波の変位、横軸は位置を表し、手前に向けた軸は経過時間で、各曲線は波形の変貌を間欠的に示している。

3) 二等辺三角形パルス波の反射 (理論)

図17に二等辺三角形パルス波の反射の全容を理論により求めた結果を示す。このときの重りの運動について、変位と経過時間の関係を図18に、異なる質量をもつ重りにおいて反射した波形を図19に示す。これによると、0.001gの重りは自由端として振る舞う。また6.89gの重りは固定端に極めて近い振る舞いをする。しかし、反射波の後側に微小変位の裾が広がっている。

表2 各種の重りにおいて、山形パルス波が反射する姿の時間経過に伴う様子 (その1)



4) 正弦波の反射 (理論)

振幅 $a = 3 \text{ cm}$ 、波長 $\lambda = 12 \text{ cm}$ の正弦波が、異なる質量の重りにおいて反射する姿の全容を、理論により求めた。これを図20に示す。これには、入射波と反射波、またこれらの合成波を示した。このときの重りの運動を図21に、また入射波から重りの質量に応じて変わる反射波の位相の遅れを図22に示す。

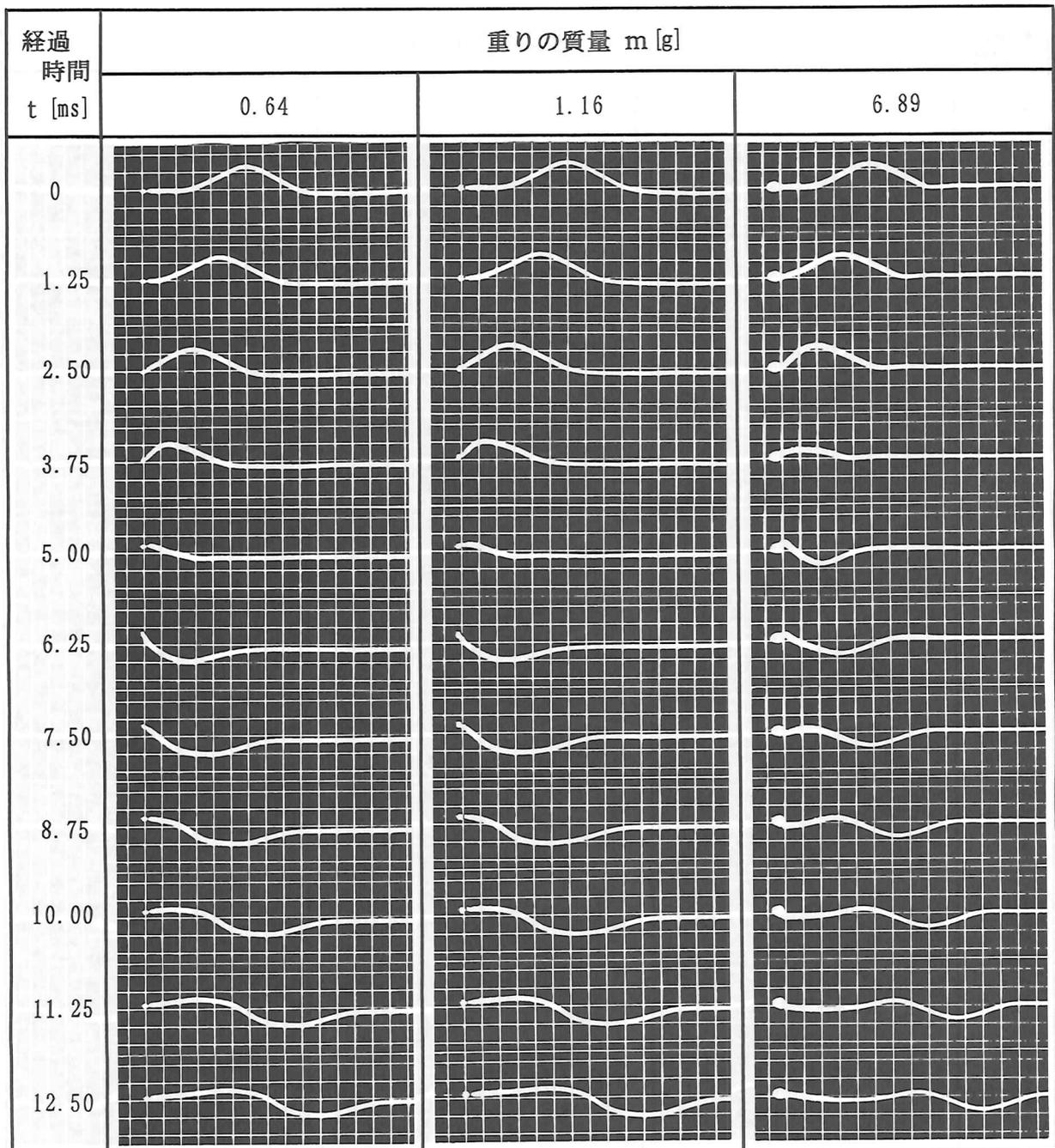
この位相差 θ は、表1に示した結果から

$$\tan(\theta/2) = (m/\rho) / (\lambda/2\pi)$$

となる。

この式から重りは $m \leq 0.001 \text{ g}$ ($m/\rho \leq 0.0032 \text{ cm}$) において $\theta \leq 1^\circ$ となり自由端に近い、また $m \geq 6.89 \text{ g}$ ($m/\rho \geq 223 \text{ cm}$) において $\theta > 179^\circ$ となり固定端に近い振る舞いをする事が分かる。これらは図20~22においても確認できる。当然な

表3 各種の重りにおいて、山形パルス波が反射する姿の時間経過に伴う様子 (その2)



がら、これらの限界を示す m/ρ の値は、波長 λ が長いと大きく、短いと小さくなる。

図20に示した位相が 90° である $0.06g$ の重りにおける反射は、この時刻において合成波の波頭に

続くおよそ半波長分に変位が残り、この後の波を消してしまっている。この現象は、2つの正弦波による定常波の一瞬の現象にすぎない。

(本学教授 函館校)

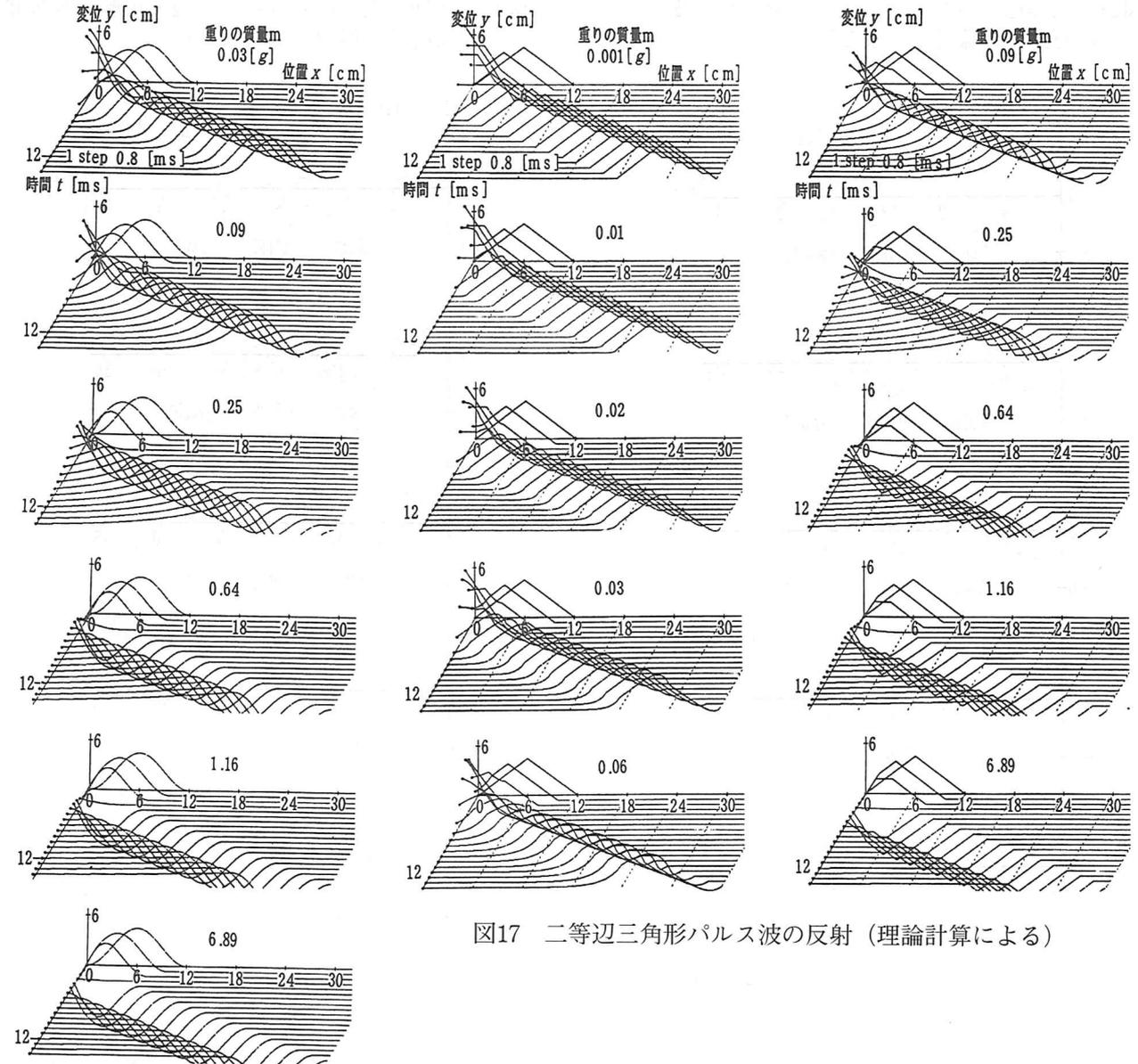


図17 二等辺三角形パルス波の反射 (理論計算による)

図16 山形パルス波の反射 (理論計算による)

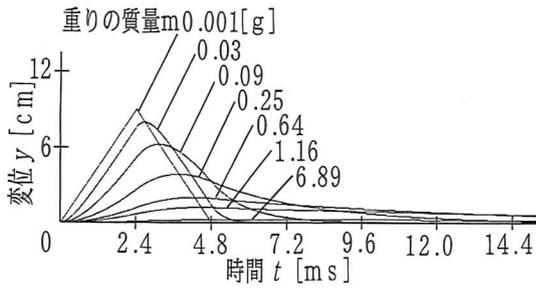


図18 二等辺三角形パルス波の反射における重りの運動 (理論計算による)

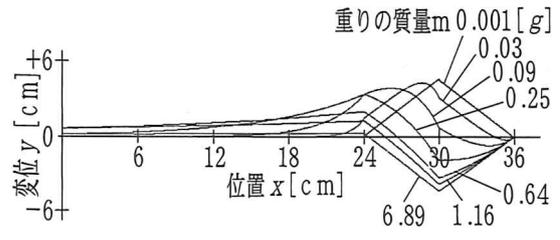


図19 各種の重りにおける二等辺三角形パルス波の反射波 (理論計算による)

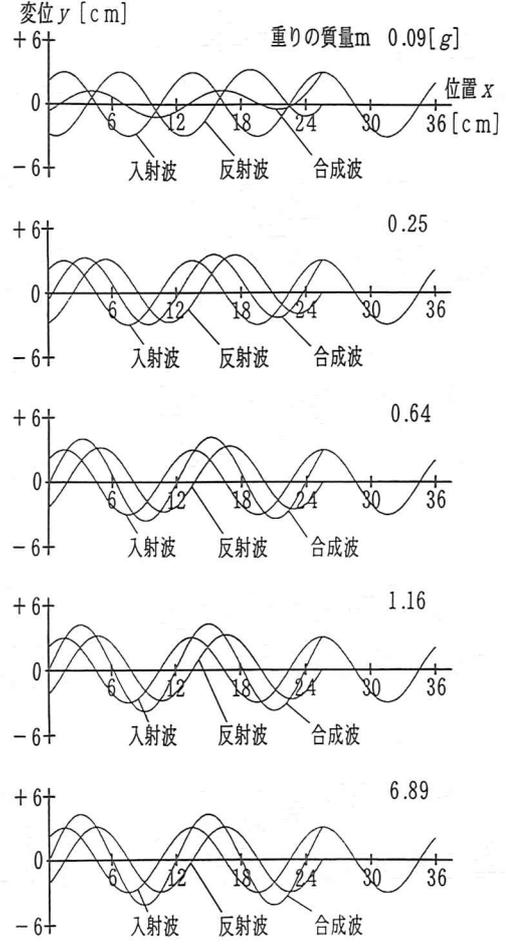
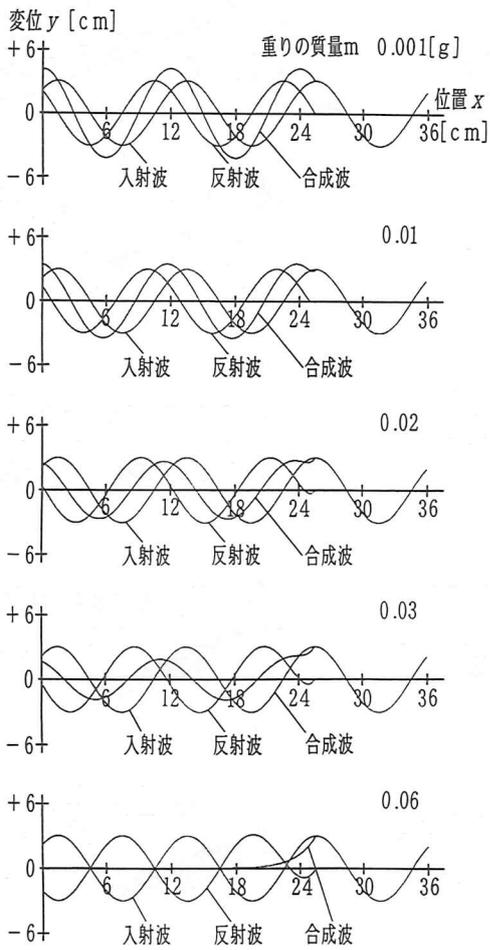


図20 正弦波の反射 (理論計算による)

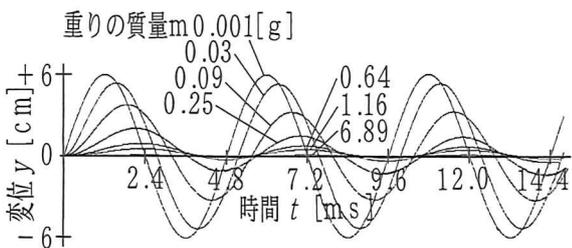


図21 正弦波の反射における重りの運動 (理論計算による)

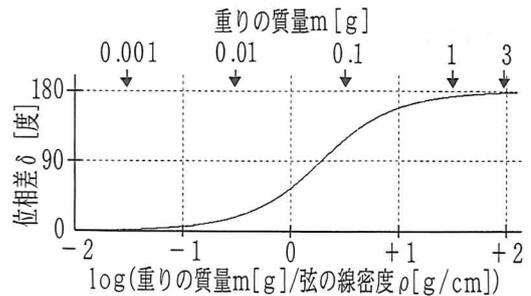


図22 正弦波の入射波が重りにより反射するときの位相の遅れ