φ粒子およびγ粒子の質量準位と崩壊幅へのスピン依存相互作用の効果

北海道教育大学紀要（自然科学編）第52巻　第1号
Journal of Hokkaido University of Education (Natural Sciences) Vol. 52, No. 1

平成 13 年 9 月
September, 2001

ψ粒子およびΥ粒子の質量準位と崩壊幅へのスピン依存相互作用の効果

本間　一徳*・酒井　源樹

北海道教育大学釧路校物理学研究室

Effects of the Spin-dependent Interactions on Mass Spectra and Decay Widths of ψ- and Υ-particles

HOMMA Kazunori and SAKAI Motoki

Department of Physics
Kushiro Campus, Hokkaido University of Education

Abstract

To obtain the mass and the decay width of the heavy quarkonium ($q\bar{q}$, $J^P=1^-$), ψ or Υ which decays to lighter mesons (M$\bar{\text{M}}$) under the OZI-allowed rule, three types of interactions are taken into account, that is, the confining potential between q and $\bar{q}$, the transition potential between $q\bar{q}$ and M$\bar{\text{M}}$ channels, and the final state interaction (FSI) in the decaying meson-antimeson channel, within a framework of the constituent quark model. The spin-dependent interaction (tensor, spin-orbit and spin-spin terms), whose regularized forms are derived by Falkensteiner et al., is included in the standard confining central term between q and $\bar{q}$ as a part of the relativistic corrections. The terms other than the confining one are assumed to be of phenomenological functional forms. The complex scaling method (CSM) is applied to solve the coupled 4-component Schrödinger equation in the one-open-channel approach with the aid of the renormalized Numerov method as a numerical calculation. The tensor and spin-orbit terms are found to decrease both the mass and the width, and this effect is appreciably large in D-states but not in S-states. The spin-spin term brings increase either in the mass or in the width of lower levels, although heavy quarkonia seem to be of non-relativistic nature and the spin-dependent interaction is expected to exert less effect on the system than on ordinary quark systems.

1　はじめに

クォークにはフレーバーが異なる6種類(u,d,s,c,b および t)が存在する．これらのクォーク q はその

*2001年4月より，㈱エイチ・シー・シーに所属

反クォーク $\bar{q}$ と強い相互作用によって対を成し，メソン $q\bar{q}$ を構成する．このような結合系はクォーコニウムと呼ばれ，典型として ψ 粒子のファミリーは $c\bar{c}$ からなるチャーモニウムであり，Υ 粒子のファミリーは $b\bar{b}$ からなるボトモニウムであるとみなされている．ハドロン現象を記述するのがクォークとグルーオンの力学である量子色力学(QCD)であると考えられており，ハドロン内のクォーク間の力はQCDにより，閉じ込め力と漸近的自由性によって特徴づけられる．本稿が対象とする c クォークおよび b クォークは，他の u, d および s クォークに比べて重く，これらの重いクォークを含むメソンやバリオンを扱う場合には非相対論近似が悪くはないものと期待されている．事実，その枠組みの計算で得られる質量準位は実験データをある程度再現することが示されている．[1]-[6]

このような重いクォーコニウムの共鳴状態はOZI許容則にしたがい，真空から新たに軽いクォーク反クォーク対 $q\bar{q}$ を生成し，より軽い他のメソン・反メソン対 $M\bar{M}$ へと崩壊していくことが知られている．この現象は，初めの $q\bar{q}$ の質量が，新たに生成される $M\bar{M}$ の質量をしきい値として，$M\bar{M}$ が $q\bar{q}$ に対して開チャネル（open channel）である場合に起こるが，こうした状態においてQCDから導かれた性質に基づく分析は少なく，また単純に元の $q\bar{q}$ 間の相互作用のみによって質量を完全に再現することは難しい．近年ではこのような $q\bar{q}$ の物理的記述には強い崩壊と質量の統一的な理解が必要であると考えられており，$q\bar{q}$ が $M\bar{M}$ に崩壊するときの遷移ポテンシャルと終状態における $M\bar{M}$ 間の相互作用を取り入れた，$q\bar{q}$ と $M\bar{M}$ との結合模型によって正しい境界条件の下で質量準位および崩壊幅が計算されている．[5]-[10]

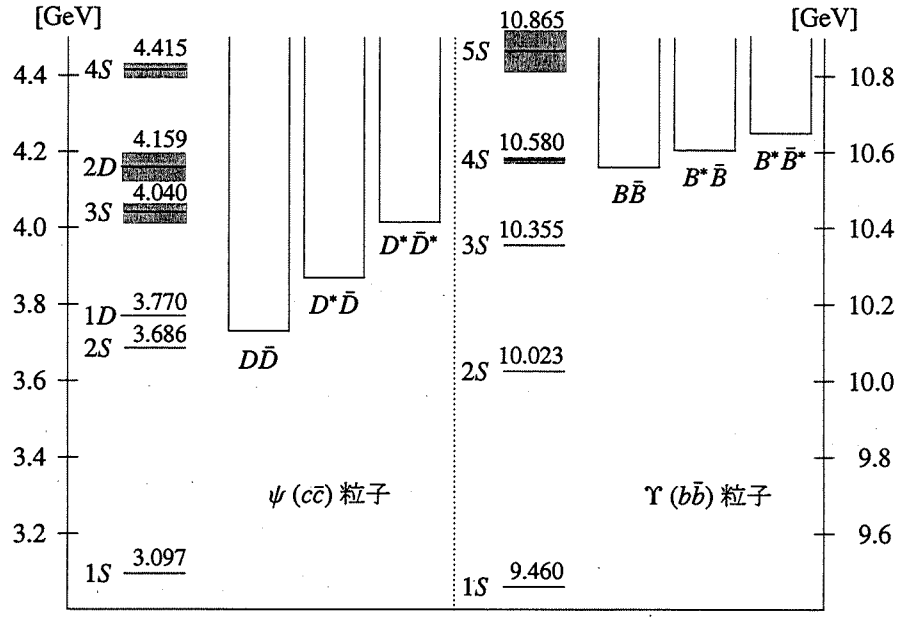

図1：**ψファミリーおよびΥファミリーの質量準位と崩壊チャネル（測定値）．**左半分にチャーモニウム，右半分にボトモニウムについて観測されている質量準位と崩壊チャネルを示した．なお，共鳴準位の全崩壊幅を影を付してあらわした．崩壊先のメソン・チャネルのうち，$D^*\bar{D}^*$のしきい値は4.014 GeVであり，$B\bar{B}$ のそれは10.558 GeVである．

一方，崩壊先のチャネルには軽いクォーク(u, d, s)が関与することになるから，非相対論取り扱いでは不十分であり，相対論効果としてのスピンに関わる相互作用が無視はできなくなることが予想される．重いクォークからなる系と軽いクォークからなる系はこれまでこの点について扱いが異なっていたが，ψやΥ

のような重いクォーコニウムに対しても Falkensteiner, Flamm, Schöberl[14], および Hirano, Iwata, Katō, Murota[15]はスピン依存性のあるポテンシャルを取り入れたクォーコニウム模型や質量準位について言及している．しかしながら，この枠組みの中では前述のような遷移ポテンシャルや終状態相互作用という扱いをしておらず，強い相互作用による崩壊現象において，スピンに依存したポテンシャルが質量と崩壊幅に対して，どのような影響を与えるかについては触れられていない．

本稿は，ψとΥの質量と崩壊幅に及ぼすスピン依存相互作用の効果を検証しようとするものである．その第一段階として，開チャネルとして主要な一つのみを考慮し，ψとΥの質量と崩壊幅について one-open-channel 問題を取り上げる．この枠組みでの $q\bar{q}$ と $M\bar{M}$ の結合は，クォーコニウムの質量としきい値がもっとも接近している場合が重要であることが指摘されていることから,[6] 結合すべきメソン・チャネル $M\bar{M}$ としてψに対しては $D^*\bar{D}^*$ を，Υに対しては $B\bar{B}$ をそれぞれ扱う．また，ψやΥを構成するクォークによるスピン依存力を，テンソル力，スピン・軌道力，スピン・スピン力の3種類に限定し，これらが，クォーコニウムの質量および崩壊幅に対してどのような効果を見せるかを取り上げる．

2 メソンの開チャネルを取り入れたクォーコニウム問題の枠組み

2.1 従来の結合(coupling)模型

軽いメソンの開チャネルのうち主要と考えられる一つだけを取り入れて問題を扱った[5]-[8]では，ψおよびΥそれぞれの nS 状態(n^3S_1)とメソン・反メソン対 $M\bar{M}$ の相対 P 状態($l=1$)とのチャネル結合の動径波動関数 $\Psi(r)/r$ を

$$\Psi(r)/r=\begin{pmatrix}\psi_{q\bar{q}}(r)/r\\ \phi_{M\bar{M}}(r)/r\end{pmatrix} \tag{1}$$

の形に与え，次のハミルトニアン $H(r)$ のもとで $\Psi(r)$ について Schrödinger 方程式を扱っている[1].

$$H(r)\Psi(r)=E\Psi(r), \tag{2}$$

$$H(r)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\mu_q}\frac{d^2}{dr^2}+V_{q\bar{q}}(r) & f(r)\\ f(r) & -\frac{1}{2\mu_M}\frac{d^2}{dr^2}+V_{M\bar{M}}(r)\end{pmatrix}. \tag{3}$$

$\psi_{q\bar{q}}(r)$ は閉じ込め（confining）チャネルである $q\bar{q}$ の成分を，$\phi_{M\bar{M}}(r)$ は崩壊チャネル $M\bar{M}$ の成分を表す．なお，μ_q および μ_M は，それぞれのチャネルでの換算質量を記す．

本稿では[6]にならって，相互作用ポテンシャル項を以下のように設定する．

$$V_{q\bar{q}}(r)=G_L(r)\equiv\lambda r-\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r}+U_0+\frac{L(L+1)}{2\mu_q r^2}, \tag{4}$$

$$V_{M\bar{M}}(r)=Y_l(r)\equiv Y_0\,e^{-\nu r}+\frac{l(l+1)}{2\mu_M r^2}, \tag{5}$$

[1] 自然単位系（$\hbar=c=1$）を用いる。

$$f(r)=f_{M\bar{M}}\{1+\tanh(ar-b)\}\equiv f_{M\bar{M}}\frac{2}{1+e^{-2(ar-b)}}. \tag{6}$$

式(4)の$V_{q\bar{q}}(r)$は$q\bar{q}$間の相互作用であり，ここでは$G_L(r)$という標準ポテンシャルによる中心力のみを扱っていることを示している．Lは$q\bar{q}$系の軌道角運動量であるが，[5]-[8]で扱われた系はS状態($L=0$)なので，この限りでは当然，遠心力項$L(L+1)/2\mu_q r^2$は効かない．また，式(6)のlは$M\bar{M}$系の軌道角運動量を表し，角運動量の保存から$q\bar{q}$のS状態からの崩壊はp状態をとる．以下，軌道角運動量の表示について，$q\bar{q}$系に対しては大文字Lを，$M\bar{M}$系に対しては小文字lを，それぞれ用いる．

式(5)の$V_{M\bar{M}}(r)$は崩壊後のメソンと反メソンの間に働く終状態相互作用である．また，式(6)の$f(r)$は遷移ポテンシャルで，$q\bar{q}$と$M\bar{M}$を結合させる役割を担っている．ここで用いられている$Y_l(r)$は指数関数型，$f(r)$はウッズ-サクソン(Woods-Saxon)型で，いずれも強い相互作用による崩壊現象に則った現象論ポテンシャルであるが，質量と崩壊幅の統一的な理解には非常に重要である．

式(4)～(6)に含まれるパラメータを次の(i)～(iii)に採る．

(i)　$a=0.25\,\mathrm{GeV}$, $b=1.75$, $\lambda=0.183\,\mathrm{GeV}^2$

(ii)　$\alpha_s=0.39$, $Y_0=1.0\,\mathrm{GeV}$, $\nu=0.26\,\mathrm{GeV}$, $f_{M\bar{M}}=0.145\,\mathrm{GeV}$, $U_0=-1.1753\,\mathrm{GeV}$,

(iii)　$\alpha_s=0.356$, $Y_0=0.2\,\mathrm{GeV}$, $\nu=0.26\,\mathrm{GeV}$, $f_{M\bar{M}}=0.055\,\mathrm{GeV}$, $U_0=-0.9153\,\mathrm{GeV}$. (7)

ここで，(i)はψとΥとに共通であり，(ii)は$\psi\to D^*\bar{D}^*$の遷移に対して，(iii)は$\Upsilon\to B\bar{B}$の遷移に対して，それぞれ，用いられる．

ψやΥはスピン・パリティが$J^P=1^-$であるが，このパリティが奇になるのは，クォーコニウムを構成するクォークqと反クォーク$\bar{q}$で内部パリティの符号が異なることに起因する．この点を考慮すれば重陽子と同じように，ψとΥをスピン三重項($J^\Pi=1^+$)[2]として扱うことができ，$^3S_1(L=0,\ S=1)$の他に$^3D_1(L=2,\ S=1)$をとる．また，ψの崩壊先として考える$D^*\bar{D}^*$-チャネルのD^*メソンのスピン・パリティは$J^P=1^-$であり，ψからの崩壊先である$D^*\bar{D}^*$-チャネルはp状態だけでなくf状態($l=3$)も許される．以上の点を念頭に置き，波動関数(1)の二つの成分それぞれが，

$$\psi_{q\bar{q}}(r)\to\begin{pmatrix}\psi_S(r)\\ \psi_D(r)\end{pmatrix}\quad\text{および}\quad\phi_{M\bar{M}}(r)\to\begin{pmatrix}\phi_p(r)\\ \phi_f(r)\end{pmatrix} \tag{8}$$

と拡張されるべきである．したがって，(8)を扱うために，式(3)は4成分Schrödinger方程式

$$H(r)\to\begin{pmatrix}H_{q\bar{q}}(r) & f_{Ll}(r)\\ f_{Ll}^{\mathrm{T}}(r) & H_{M\bar{M}}(r)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\mu_q}\frac{d^2}{dr^2}I+V_{q\bar{q}}(r) & f_{Ll}(r)\\ f_{Ll}^{\mathrm{T}}(r) & -\frac{1}{2\mu_M}\frac{d^2}{dr^2}I+V_{M\bar{M}}(r)\end{pmatrix} \tag{9}$$

となる．$V_{q\bar{q}}(r)$，$V_{M\bar{M}}(r)$および$f_{Ll}(r)$も対応して，それぞれ，(2×2)行列として表現される．ここでIは2次の単位行列であり，上付き添字$^{\mathrm{T}}$は転置行列を表す．各項は

[2] 本稿ではスピン・パリティの表現に、内部パリティを含めて表す場合にはJ^Pと書き、内部パリティによらず単にクォークの複合系とみなす場合にはJ^Πと記す。

$$V_{q\bar{q}}(r)\to\begin{pmatrix} G_S(r) & 0 \\ 0 & G_D(r)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda r-\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r}+U_0 & 0 \\ 0 & \lambda r-\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r}+U_0+\frac{6}{2\mu_q r^2}\end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$V_{M\bar{M}}(r)\to\begin{pmatrix} Y_p(r) & 0 \\ 0 & Y_f(r)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma_p Y_0\, e^{-\nu r}+\frac{2}{2\mu r^2}+U_0 & 0 \\ 0 & \gamma_f Y_0\, e^{-\nu r}+\frac{12}{2\mu_M r^2}\end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$f_{LI}(r)\to\begin{pmatrix} f_{Sp}(r) & f_{Sf}(r) \\ f_{Dp}(r) & f_{Df}(r)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \eta_{Sp}f_{M\bar{M}}W(r) & \eta_{Sf}f_{M\bar{M}}W(r) \\ \eta_{Dp}f_{M\bar{M}}W(r) & \eta_{Df}f_{M\bar{M}}W(r)\end{pmatrix}, \tag{12}$$

と拡張される．ただし，$f_{LI}(r)$においてすべてのチャネルで$W(r)=2/\{1+e^{-2(ar-b)}\}$を共通にとった．図2に$q\bar{q}$の閉じ込めポテンシャルである標準ポテンシャル$G_L(r)$を示す．

以上の拡張が施されたポテンシャルのうち，式(11)と(12)については，クォーコニウムと結合すべきメソンチャネルのそれぞれの状態に依存した相互作用強度の換算比（γ_l，η_{LI}）を用いて表している．[10]によれば式(11)のγ_lのl依存性は

$$\gamma_p:\gamma_f=1:2$$

であり，式(12)のη_{LI}はLとIの組み合わせにより，

$$\eta_{Sp}:\eta_{Sf}:\eta_{Dp}:\eta_{Df}=1:0:2/\sqrt{35}:6/\sqrt{35}$$

と与えられる．図3に遷移ポテンシャル$f_{LI}(r)$および$M\bar{M}$の終状態相互作用$Y_l(r)$を示す．ただしΥの崩壊先として考える$B\bar{B}$-チャネルのBメソンのスピン・パリティは$J^P=0^-$であり，$B\bar{B}$についてはp状態だけを扱うことができる．表1はこのような扱いで得られた結果である．

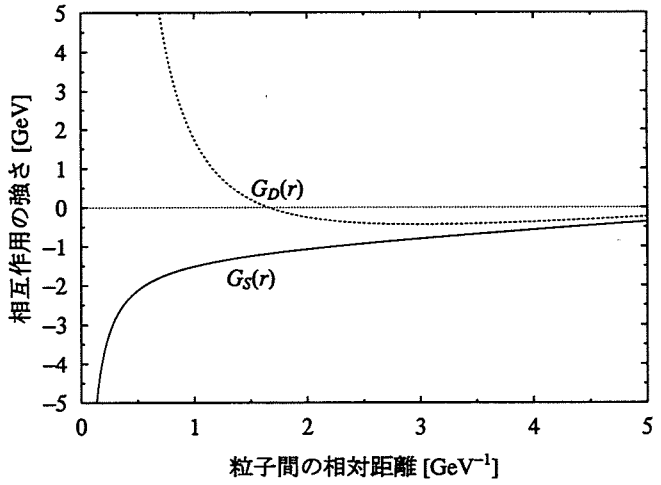

図2：**閉じ込めポテンシャル（中心力）** $G_L(r)$．粒子間距離とともにクーロン項より線形項が支配的となる．1 GeV^{-1}は約0.2 fmに相当する．

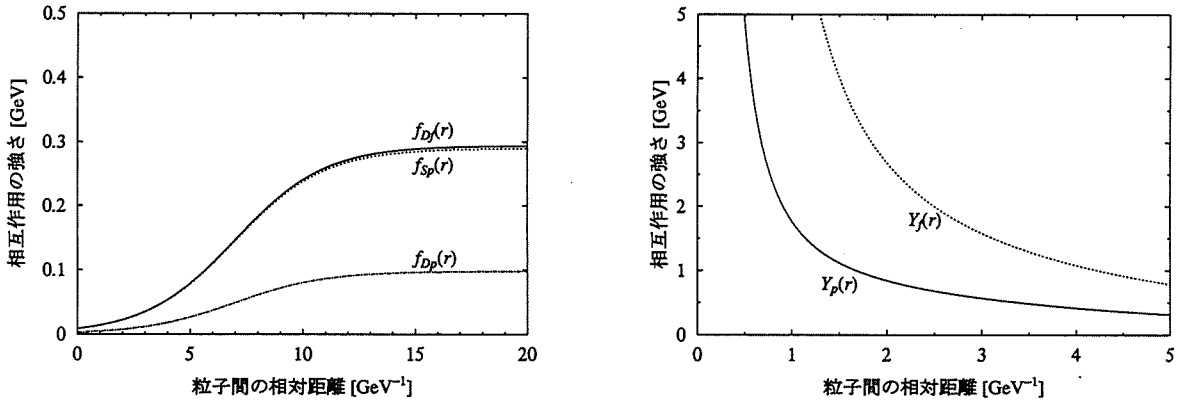

図3：**遷移ポテンシャル$f(r)$と終状態相互作用$Y(r)$**．遷移相互作用$f(r)$は3－11 GeV^{-1}で大きな引力が働く．終状態相互作用$Y(r)$は単調減少指数関数型であり，粒子間距離とともに斥力は弱まる．

表1：**クォーコニウムの質量単位**．単一開チャンネル模型によって計算されたψとϒの質量(単位 GeV)と崩壊幅(単位 MeV)である．（以下，表2，3の単位も同様．）

	ψ				ϒ			
	実験データ		1-open channel		実験データ		1-open channel	
状態	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)
$5S$					10.86500	(110±13)	10.86435	(1.68)
$4S$	4.41500	(43±15)	4.47746	(36.08)	10.58000	(21± 4)	10.60879	(25.15)
$3S$	4.04000	(52±10)	4.03954	(68.35)	10.35500		10.35515	
$2S$	3.68600		3.68362		10.02300		10.02398	
$1S$	3.09688		3.09657		9.46000		9.46153	
$2D$	4.15900	(78±20)	4.15336	(28.76)				
$1D$	3.76900		3.80679					

2.2　スピン依存力

閉じ込め相互作用$V_{qq}(r)$について中心力に加えて，テンソル項$V_T(r)$，スピン・軌道項$V_{LS}(r)\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$，スピン・スピン項$V_{ss}(r)\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2$を取り入れる．

$$V_{qq}(r)=G_L(r)+V_T(r)S_{12}+V_{LS}(r)\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}+V_{ss}(r)\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2 \tag{13}$$

式(13)のS_{12}，$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2$はそれぞれ，テンソル演算子，スピン・軌道演算子，スピン・スピン演算子である．

ここで取り上げた3つのスピン依存力の動径成分$V_T(r)$，$V_{LS}(r)$，$V_{ss}(r)$について，文献[15]では以下のポテンシャルを導出している．[3]

$$V_T(r)=\frac{\alpha_g}{4m_q^2}\frac{1}{r^3},\quad V_{LS}(r)=\frac{1}{2m_q^2}\left(\frac{3\alpha_g}{r^3}-\frac{\lambda}{r}\right),\quad V_{ss}(r)=\frac{8\pi\alpha_g}{3m_q^2}\delta(r) \tag{14}$$

ここで，m_qは系を構成するクォークの質量，$\alpha_g=4\alpha_s/3$である．この型には原点で$1/r^3$の非常に強い特異性

[3] 文献[15]には$V_{LS}(r)$の表記に誤植があり、正しくは(14)である（著者との私信による）。

があり，このままでは解くことが難しい．これに対し，文献[14]では色電荷の遮蔽効果を考慮して

$$V_{\mathrm{T}}(r)=\frac{4\alpha_s}{9m_1m_2}\left[\frac{3}{r^3}\mathrm{erf}(\sqrt{\pi}Mr)-\frac{6M}{r^2}e^{-\pi M^2r^2}-4\pi M^3e^{-\pi M^2r^2}\right], \tag{15}$$

$$V_{\mathrm{LS}}(r)=\frac{1}{4m_1^2m_2^2}\left[\frac{4\alpha_s}{3r^2}\mathrm{erf}(\sqrt{\pi}Mr)-\frac{8M\alpha_s}{3r}e^{-\pi M^2r^2}\{(m_1+m_2)^2+2m_1m_2\}-\lambda(m_1^2+m_2^2)\right], \tag{16}$$

$$V_{\mathrm{ss}}(r)=\frac{32\alpha_s\pi M^3}{9m_1m_2}e^{-\pi M^2r^2} \tag{17}$$

が導き出されていた．前者に見られる$1/r^3$の特異性はここでは誤差関数$\mathrm{erf}(x)$によって正則化され，振る舞いの穏やかなポテンシャルが得られている．m_1とm_2は系を構成するクォークの質量であり，ψとΥに関しては$m_1=m_2$である．また，Mはパラメータである．本稿では後者の型のポテンシャルを採用する．

テンソル力，スピン・軌道力，スピン・スピン力を取り入れたSchrödinger方程式は次のように書かれる．

$$\left[-\frac{1}{2\mu_q}\frac{d^2}{dr^2}+G_s(r)+\frac{1}{4}V_{ss}(r)-E\right]\Psi_s(r)+\sqrt{8}V_{\mathrm{T}}(r)\Psi_D(r)+f_{Sp}(r)\phi_p(r)=0, \tag{18}$$

$$\left[-\frac{1}{2\mu_q}\frac{d^2}{dr^2}+G_D(r)-2V_{\mathrm{T}}(r)+3V_{\mathrm{LS}}(r)+\frac{1}{4}V_{ss}(r)-E\right]\Psi_D(r)$$
$$+\sqrt{8}V_{\mathrm{T}}(r)\Psi_S(r)+f_{Dp}(r)\phi_p(r)+f_{Df}(r)\phi_f(r)=0, \tag{19}$$

$$\left[-\frac{1}{2\mu_M}\frac{d^2}{dr^2}+Y_p(r)-E\right]\phi_p(r)+f_{Sp}(r)\phi_S(r)+f_{Dp}(r)\Psi_D(r)=0, \tag{20}$$

$$\left[-\frac{1}{2\mu_M}\frac{d^2}{dr^2}+Y_f(r)-E\right]\phi_f(r)+f_{Df}(r)\Psi_D(r)=0. \tag{21}$$

このように本稿では$f_{LL}(r)$によって始めの$q\bar{q}$と崩壊後のM$\overline{\mathrm{M}}$が結合し，ψとΥを，$V_{\mathrm{T}}(r)$によって$^3S_1$と$^3D_1$が混成した系として扱う．連立微分方程式(18)-(21)は解析的な方法では解くことができないため，renormalized Numerov method（以下，RNMと略記）[20]による数値解法を用いることとなる．また，ψあるいはΥがM$\overline{\mathrm{M}}$を開チャネルとする．散乱状態の境界条件を扱わなければならない場合，解を精度良く求めるには工夫を要する．このような問題を解く手段として，Aguilar-Balslev-CombesおよびSimonによる複素スケーリング法(complex scaling method)がある．次節では，彼らのABC定理[18]に基づくSchrödinger方程式の扱いを述べる．

2.3 複素スケーリング法

複素スケーリング法は，解析的なポテンシャルについて，束縛状態(bound states)のスペクトルのみならず，共鳴状態(resonant states)にある粒子系の質量と崩壊幅をも厳密に求めることができる強力な手法である．この方法では，動径変数rに対してスケール変換$S(\theta)$(θは複素平面上での回転角)を施す．

$$P\to Pe \quad S(\theta):\ r\to re^{i\theta} \tag{22}$$

この変換はまた，運動量を$p\to pe^{-i\theta}$にスケールすることをも意味する．スケール変換された波動関数およびハミルトニアンを，それぞれ，

$$\Psi_\theta(r)=S(\theta)\Psi(r)=e^{3i\theta/2}\Psi(re^{i\theta}) \quad \text{および} \quad H_\theta=S(\theta)HS(\theta)^{-1}=Te^{-2i\theta}+V(re^{i\theta}) \tag{23}$$

とすると，動径変数に関するSchrödinger方程式(2)は対応して

$$H_\theta\Psi_\theta(r)=E\Psi_\theta(r) \tag{24}$$

と変換される．しかしながら，H_θ は非エルミット演算子であって，結果としてそれは複素固有値をとることになり，この点がエルミット演算子 $H=T+V(r)$ が実固有値をとるのとは異なる，この方法の特徴である．

これは次のような事情と対応づけて考えることができる．ハミルトニアン H の固有関数である定常状態の波動関数はその時間依存因子も含めて

$$\Phi(r,t)=\varphi(r)\exp(-iEt) \tag{25}$$

と表される．したがって確率密度 $|\Phi(r,t)|^2$ は

$$\Phi^*(r,t)\Phi(r,t)=\varphi^*(r)\varphi(r)\exp(+iE_r t)\exp(-iE_r t)=|\varphi(r)|^2 \tag{26}$$

となり時間的に変動せず，$\Phi(r,t)$ が定常状態を表わす所以であった．一方，H_θ は非エルミット演算子であって，式(25)に対して得られる固有値が複素数 $(E=E_r-i\Gamma/2)$ であるときには，

$$\Phi^*(r,t)\Phi(r,t)=\varphi^*(r)\varphi(r)\exp(+iE^* t)\exp(-iEt)=|\varphi(r)|^2\exp(-\Gamma t) \tag{27}$$

となる（ただし，$\Gamma>0$），式(27)は複素エネルギー固有値にたいしては，時間の進行とともに確率密度が減衰していくこと，その割合がΓで与えられることを示している．このΓが崩壊幅であり，時間の逆数の次元をもつ．崩壊幅が小さい(狭い)ほど粒子系は長い寿命で存在でき，反対に崩壊幅が大きい(広い)ほど短寿命で不安定な存在となる．すなわち，式(24)は共鳴状態を取り扱う枠組みになっており，その著しい長所は以下の点に見ることができる．[19]

外向波の境界条件で与えられる共鳴状態の波動関数はrの十分遠方では$\Psi(r)\overset{r\to\infty}{\sim}\exp(ikr)$の振る舞いをする．外向波の波数(運動量)$k$は $k=\sqrt{2\mu E}=\kappa-i\gamma$ で与えられる $(\gamma>0)$ から，

$$\Psi(r)\overset{r\to\infty}{\sim}\exp[\mathrm{i}(\kappa-i\gamma)r]=e^{i\kappa r}e^{+\gamma r} \tag{28}$$

は遠方で発散し2乗積分は可能とはならない．これに対して複素スケーリングを施すと，

$$\Psi_\theta(r)\overset{r\to\infty}{\sim}\exp[i(\kappa-i\gamma)re^{i\theta}]=e^{i(\kappa\cos\theta+\gamma\sin\theta)r}e^{-(\kappa\sin\theta-\gamma\cos\theta)r} \tag{29}$$

が得られ，$\kappa\sin\theta-\gamma\cos\theta>0$，すなわち，$\theta>\tan^{-1}(\gamma/\kappa)$，あるいは同じことだが，$2\theta>\tan^{-1}\left(\Gamma/2E_r\right)$ となるスケール角θを選ぶことによって$\Psi_\theta(r)$は無限遠方で0に収束する．共鳴状態の波動関数が束縛状態と同じ境界条件でえられることになる．

解析的に振る舞うポテンシャル $V(r)$ について，$V(re^{i\theta})$ が正則である範囲 $\theta\,(0\le\theta\le\theta_{\max})$ で，複素スケール変換された Schrödinger 方程式はより一般的には以下の性質をもつことが知られている．[18]

1．この変換によって束縛状態のスペクトルは複素エネルギー平面の負の実軸上にえられ，その値は本来の Schrödinger 方程式(2)からえられるものと変わらない．ただし，$0\le\theta\le\pi/2$（すなわち，$\cos\theta>0$）であることが必要である．

2．共鳴状態のスペクトルは正の実軸およびそれを原点のまわりに-2θ回転してできる軸とで囲む楔形の領域$(2\theta>\tan^{-1}(\Gamma/2E_r))$に $E=E_r-i(\Gamma/2)$ の位置にえられる．実部 E_r は質量を，虚部の2倍Γは崩壊幅を与える．

3．連続状態(continuum states)のスペクトルは，正の実軸を原点のまわりに-2θ回転した軸上に現れる．

以上により，共鳴状態にたいしては，スケール角の限度$\theta_{\max}$は，例えば，クーロン型では無制限，指数関数型では$\pi/2$，ガウス関数型では$\pi/4$と定まる．

3 結果と考察

3.1 結果

単一開チャネル（one-open-channel）問題として与えられた式(18)−(21)に複素スケーリング法を適用して導かれる方程式を，微分方程式の数値解法として高い精度が確保できるRNMを用いて解いた．そのプロセスは以下のとおりである．

式(18)−(21)のうち，中心力$G_L(r)$と終状態相互作用$Y_i(r)$，遷移ポテンシャル$f_{Li}(r)$に関するパラメータは2.1節で与えた．質量に関しては

$$\mu_q = \begin{cases} \mu_c = 0.920\,\mathrm{GeV} & (\psi\text{に対して}) \\ \mu_b = 0.920\,\mathrm{GeV} & (\Upsilon\text{に対して}) \end{cases}, \quad \mu_M = \begin{cases} \mu_{D^*} = 1.00350\,\mathrm{GeV} & (D^*\bar{D}^*\text{に対して}) \\ \mu_B = 2.63945\,\mathrm{GeV} & (B\bar{B}\text{に対して}) \end{cases} \tag{30}$$

を採り，スピン依存力(15)−(17)に含まれるパラメータは文献[14]にしたがった：

$$m_1 = m_2 = \begin{cases} m_c = 2.3684\,\mathrm{GeV} & (\psi\text{に対して}) \\ m_b = 5.6618\,\mathrm{GeV} & (\Upsilon\text{に対して}) \end{cases}, \quad \alpha_s = \begin{cases} 0.77370 & (\psi\text{に対して}) \\ 0.68516 & (\Upsilon\text{に対して}) \end{cases} \tag{31}$$

$$\lambda = 0.11602\,\mathrm{GeV}^2 \quad \text{および} \quad M = 0.81867\,\mathrm{GeV} \tag{32}$$

表2: **質量準位へのスピン依存力の効果**(I)[14]のパラメータの場合．スピン依存力として，(a)テンソル力のみ，(b)スピン・軌道力のみ，(c)スピン・スピン力のみ，(d)上記の3つすべて，を取り入れた．スピン依存力の寄与はϒに対する方がψよりも小さい．

ψ	(a)		(b)		(c)		(d)	
状態	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)
$4S$	4.47734	(35.95)	4.47729	(36.28)	4.47907	(43.14)	4.47885	(43.24)
$3S$	4.03967	(68.46)	4.03860	(67.86)	4.04365	(76.80)	4.04244	(75.89)
$2S$	3.68350		3.68362		3.69342		3.69325	
$1S$	3.09607		3.09657		3.11552		3.11495	
$2D$	4.15090	(27.72)	4.13790	(18.20)	4.15364	(27.59)	4.13603	(16.05)
$1D$	3.80378		3.78550		3.80688		3.78221	

ϒ	(a)		(b)		(c)		(d)	
状態	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)
$5S$	10.86426	(1.67)	10.86432	(1.67)	10.86537	(1.48)	10.86523	(1.46)
$4S$	10.60895	(25.11)	10.60872	(25.26)	10.61012	(26.65)	10.61024	(26.73)
$3S$	10.35515		10.35515		10.35696		10.35695	
$2S$	10.02396		10.02398		10.02683		10.02681	
$1S$	9.46149		9.46153		9.47214		9.47211	

表2は以上の設定下で得られたψおよびϒの質量と崩壊幅である．表中の(a)−(d)はそれぞれ，式(18)−(21)でのスピン依存力の扱いについて，(a)テンソル力が与える効果を調べるために$V_T(r)$のみ，(b)スピン・軌道力が与える効果を調べるために$V_{LS}(r)$のみ，(c)スピン・スピン力が与える効果を調べるために$V_{ss}(r)$の

み,(d)スピン依存力が全体としてどのような効果を与えるかを調べるために上記3つのすべて，を取り入れたことを示している．

さて，スピン依存力のパラメータ(m,α_s,λ)は2.1節で与えたものと本質は同じはずである．そこで，式(15)−(17)の(m,α_s,λ)に対しても,(7)で与えられるパラメータを用いる．表3は，このパラメータを設定して式(18)−(21)を解いて得られたψとϒの質量と崩壊幅である．

こうして得られた質量と崩壊幅を複素エネルギー平面で示すと図5および図6となる。各メソン・チャネルのしきいとの質量差を実軸(横軸)に，崩壊幅を(−1/2倍して)虚軸(縦軸)にとり，スピン依存力を取り入れない計算結果(表1)には実線，スピン依存力を取り入れた計算結果(表2と3)には破線をそれぞれ用い，実験データについてはエラーバー付きの＊印を付して，ψについては図5に，ϒについては図6に示した．次節では，これらを元にスピン依存力が質量と崩壊幅についてどのような効果をもたらしているかについて考察する．

表3: 質量準位へのスピン依存力の効果(II)[5]−[10]のパラメータの場合．(a)〜(d)は表2に同じ．スピン依存力の寄与がψに対するよりもϒの方が小さいことは表2と同様といえるが，前表の場合よりさらに小さい．

ψ	(a)		(b)		(c)		(d)	
状態	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)
$4S$	4.47736	(35.98)	4.47740	(36.13)	4.47883	(41.92)	4.47890	(41.88)
$3S$	4.03965	(68.45)	4.03955	(67.78)	4.04299	(75.37)	4.04297	(74.71)
$2S$	3.68354		3.68362		3.69182		3.69172	
$1S$	3.09623		3.09657		3.11251		3.11213	
$2D$	4.15130	(27.89)	4.15207	(25.48)	4.15359	(27.78)	4.15028	(23.53)
$1D$	3.80427		3.80564		3.80687		3.80300	

ϒ	(a)		(b)		(c)		(d)	
状態	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)	質量	(崩壊幅)
$5S$	10.86430	(1.68)	10.86434	(1.68)	10.86487	(1.58)	10.86482	(1.57)
$4S$	10.60887	(25.13)	10.60877	(25.18)	10.60947	(25.91)	10.60953	(25.92)
$3S$	10.35515		10.35515		10.35607		10.35607	
$2S$	10.02397		10.02400		10.02543		10.02542	
$1S$	9.46152		9.46153		9.46697		9.46696	

3.2　考察

表1と表2, 3をそれぞれ比較して第一に指摘されるのは，3つのスピン依存力(テンソル力，スピン・軌道力，スピン・スピン力)のどれもが質量や崩壊幅に与える効果がS状態に対してはそれほど大きくないことである．図4はスピン依存力の効果を比較するために図1と同じ形式で,(1)スピン依存力を取り入れない表1,(2)[14]のパラメータを用いて3つのスピン依存力を取り入れた表2(d),(3) Cornellのパラメータを用いて3つのスピン依存力を取り入れた表3(d)，のそれぞれの場合でψとϒの粒子ごとに質量と崩壊幅を示したものである．これらに明らかなように，ψに対してはスピン依存力の効果が若干は見られるがϒについてはほとんどが寄与がない．これは，重いクォーコニウムにおいては，本稿で取り入れたスピン依存力よりも，中心力など従来の非相対論的な描像が主要であることを反映した結果であると考えられる．

スピン依存力による質量や崩壊幅の変動を実験データの再現性という観点で表2,3を見よう．$V_T(r)$および$V_{ss}(r)$は質量を減少させ，高い励起準位にはより好ましい効果をもたらす．しかし，同時にそれらは崩壊幅も減少させる．また，$V_{ss}(r)$が特にS状態の質量を増加させ，崩壊幅も実験データからむしろ遠ざかる傾

向を見せるなど，全体的としては改善にはなっていない．

個々の状態について検証しよう．ϒでは実験的に$^3D_1$の存在が確認されておらず，本稿では質量や崩壊幅について実験データとの比較ができない．一方，ψについてはスピン依存力による効果がS状態に比べてD状態において大きく現れている．表1と比較して最大の変化をもたらすのは，表2(d)における$\psi(2D)$であり，約25 MeVの質量減少が生じている．これに限らず，質量の減少はD状態において特に顕著である．これは式(18)及び(19)から予想されるように，S波ψ_Sには対角成分としてはスピン・軌道力は寄与せず，また，テンソル力が作用するのも非対角成分であるD波との結合を通してだけであるのに対して，D波ψ_Dにはテンソル力による非対角成分S波との結合に加えて，テンソル力およびスピン・軌道力が$-2V_T(r)-3V_{LS}(r)$の大きさで対角成分として寄与をするからである．またS状態のスペクトルについても，表1との比較で，スピン依存力を取り入れると質量が減少し，かつ$3S$や$4S$などの共鳴準位の崩壊幅もより小さくなっている．これも，テンソル力による$^3S_1$-$^3D_1$混成が引力的効果をもたらし，エネルギー的な安定度が増すことによって系が崩壊しにくくなったためであると考えられる．一方，スピン・スピン項$V_{ss}(r)$を取り入れた場合(c)では，その効果は特に$\psi(1S)$の質量に顕著に現れ，最も寄与が大きい場合で約19 MeVも増加させる(表2(c))．にもかかわらず，より高い質量準位に対しては比較的寄与は小さく，$\psi(2S)$については9 MeV程度の増加にとどまる．崩壊幅についても，同様に，$\psi(3S)$と$\psi(4S)$を比較すると，より高い準位である$\psi(4S)$に対する効果は小さい．これは$V_T(r)$や$V_{LS}(r)$とは反対に，$V_{ss}(r)$が特に原点付近で斥力的効果をもたらしてエネルギー的な不安定度が増え，系を崩壊しやすくさせたためであると考えられる．

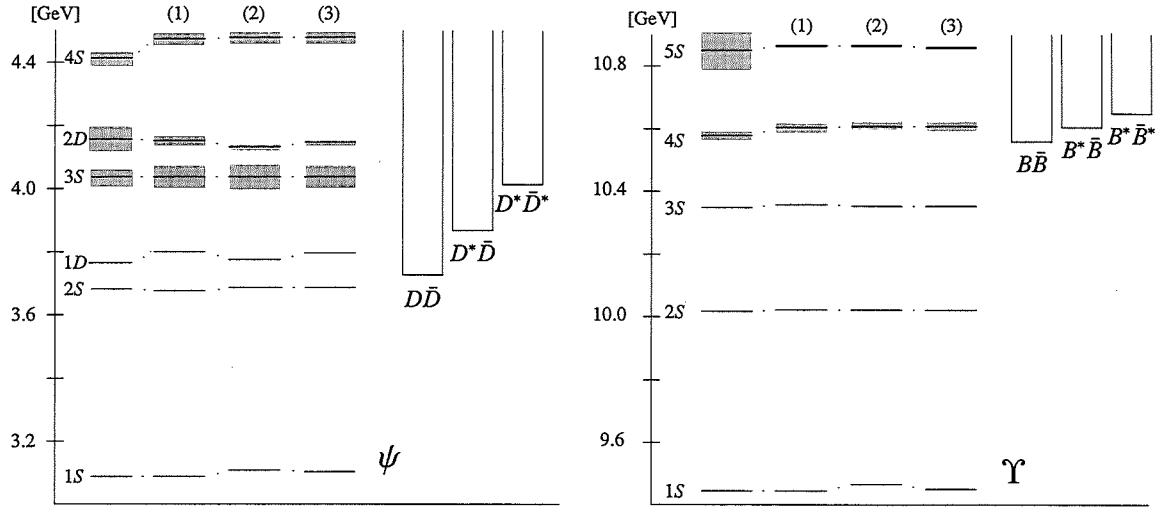

図4：**ψ（左）とϒ（右）の質量準位とメソン・チャネル．**図1と同様に崩壊幅に影を付している．図中のラベルはそれぞれ(1) スピン依存力を取り入れない場合，(2) [14]のパラメータで3つのスピン依存力を取り入れた場合，(3) Cornellのパラメータで3つのスピン依存力を取り入れた場合，である．また，最左列の準位は実験値である．

式(18)および(19)によれば，テンソル力によって$^3S_1$-$^3D_1$混成が生じる．この混成系について，Cornellグループのパラメータによっても$c\bar{c}$のみの束縛状態として扱うことができ，かつ$f_{LL}(r)$による$M\overline{M}$との結合を考慮せずに扱える表3の$\psi(1S)$と，$b\bar{b}$の同じ状態である$\Upsilon(1S)$の波動関数を図7に示す．この図は重ね合わせ法[11]によって得られたものである．図7自体は表3の場合のものであるが，特にψでは，表2と表3のいずれの場合についても$V_{ss}(r)$の存在の有無によって質量の増減が大きく現れているので，$V_{ss}(r)$によって波動関数がどのような影響を受けるかという点にも注目する．図に現れているように，ψとϒのい

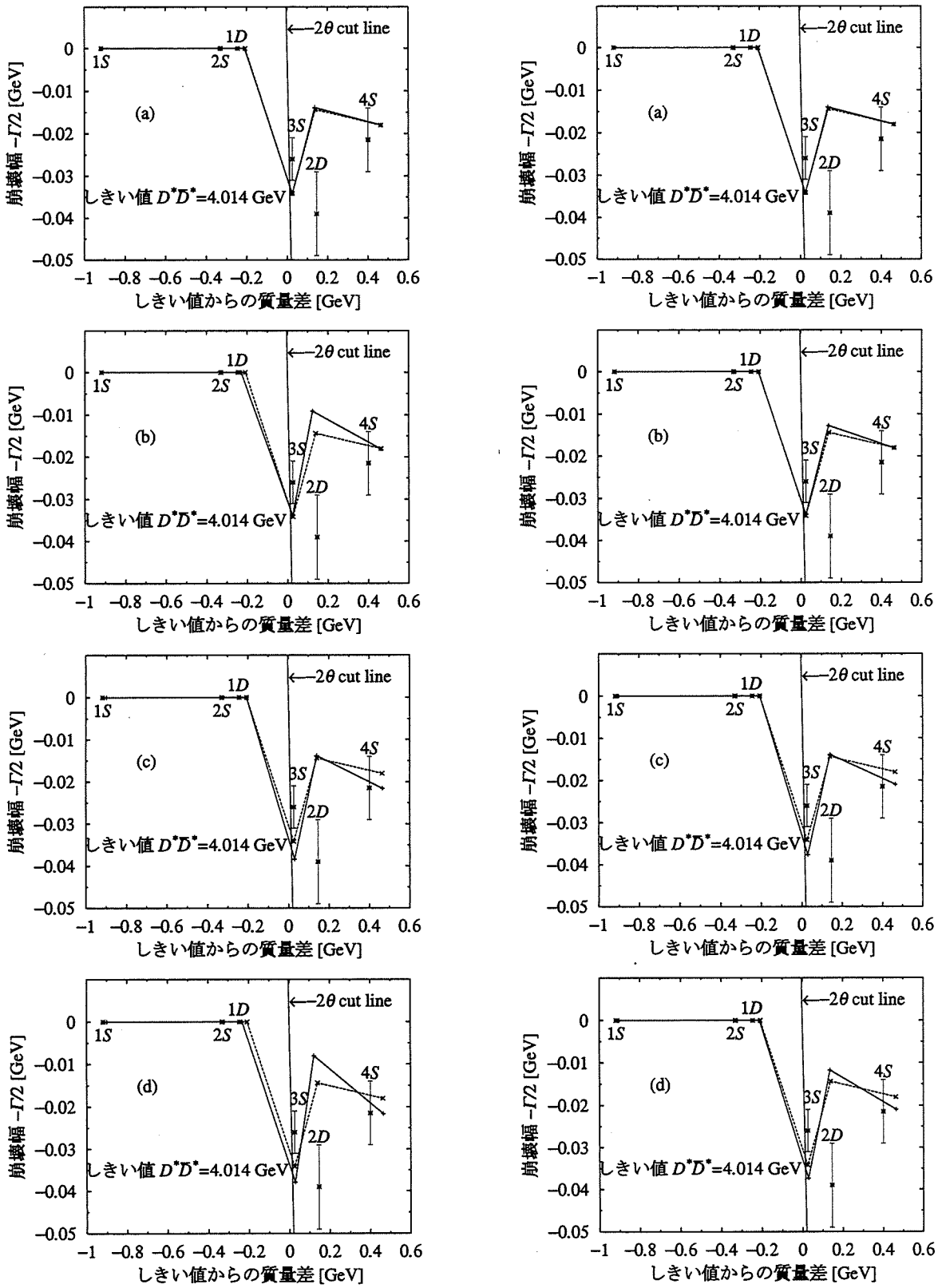

図5：ψの質量準位へのスピン依存相互作用の効果. 左列4図は文献[14]のパラメータによる，右列はCornellのパラメータによる結果である．テンソル力とスピン・軌道力が質量と崩壊幅を減少させるのに対し，スピン・スピン力はそれらをともに増加させる．左列の方が右列に比べてスピン依存項の効果が大きい．

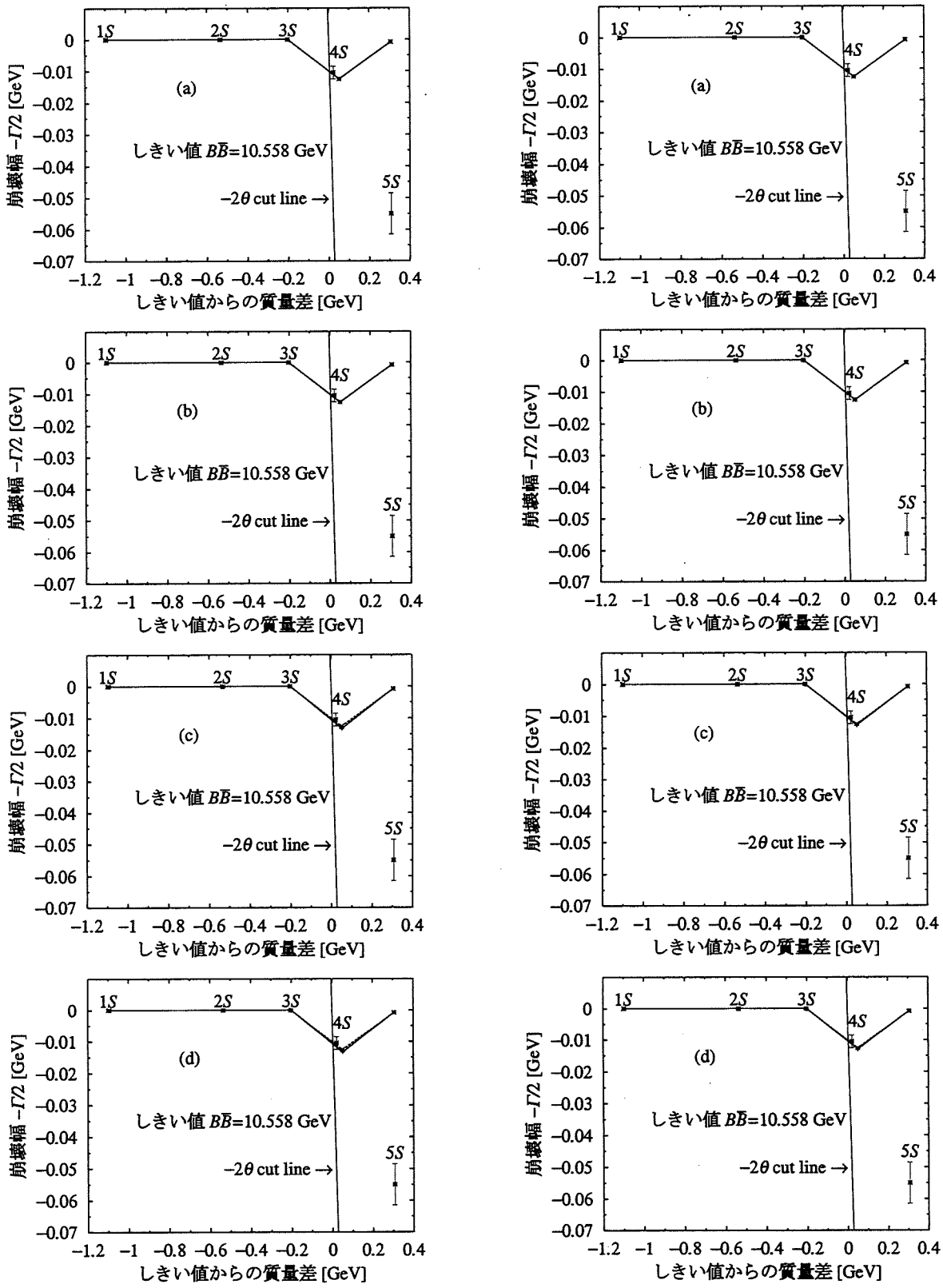

図6：ϒの資量準位へのスピン依存相互作用の効果．表2のϒの場合について図示した．D 状態は観測されておらず，図5に比してスピン依存項の効果を見いだすのは難しい．また，左右とも(a)～(d)のすべてにおいて実線と破線が重なりあい，スピン依存項が質量および崩壊幅に与える影響が全体として小さい．

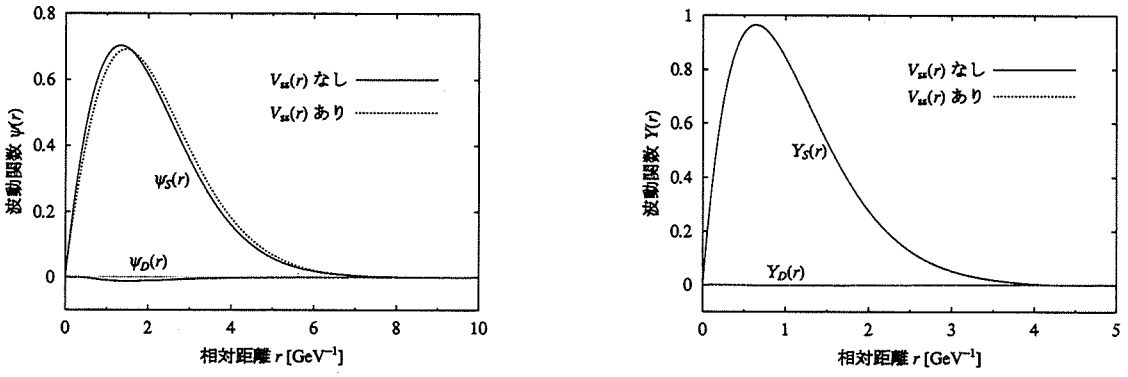

図7：ψ（左）とΥ（右）の波動関数．ψではS状態は，実線が$V_{ss}(r)$の存在しない場合，破線が$V_{ss}(r)$の存在する場合である．$V_{ss}(r)$の有無によってS状態とD状態ともに2ケースについて描かれているが，この結合によって$^3D_1$が$^3S_1$に対して占める割合は0.02％程度に過ぎず，$V_{ss}(r)$の有無にかかわらず図中では重なってしまい，差異が見られない．ΥについてもV$_{ss}(r)$の有無によってS状態とD状態の両方とも2ケースずつ描かれているが，図中では差異が見られない．

ずれの場合も$^3S_1$-$^3D_1$混成の割合は非常に小さい．同じ2粒子系でスピン三重項をなす重陽子の場合では，$^3S_1$状態に対する$^3D_1$状態の割合が4％程度あるのに対して，ψ(1S)では0.02％，Υ(1S)では0.0007％程度である．このことは，重陽子では結合エネルギーとしてテンソル力等の非中心力が重要であるのに対して，クォーコニウムでは式(4)で与えられる中心力が主要であるという事実を示していると考えられる．またΥでは見られない，したがってΥにおけるスピン依存力の小ささを如実に表していると言えるが，ψでは$V_{ss}(r)$は僅かに波動関数を遠方にシフトさせる遠心力的な役割を担っており，これが表3のψ(1S)に対しては16 MeVの質量を増加させることにつながっていると見られる．

スピン依存力に関するパラメータを2つの場合にわけて扱った結果，[14]で与えられた場合の方が質量，崩壊幅ともに増加や減少の度合いが大きい．この要因については次のように考えられる．$q\bar{q}$間の中心力の結合定数α_sは，$q\bar{q}$間の漸近的自由性を与えるものであり，$r\to 0$で$\alpha_s\to 0$となって$q\bar{q}$間に弱い束縛しか課さない性質をもっている．文献[14]やCornellグループのパラメータに拠る[6]のいずれもψに比べてΥの場合に与えるα_sが小さいのは，系を構成する粒子の質量が大きいほどその形成する系がコンパクトになり，結果としてα_sによる束縛が弱くなるためである．このような観点からはcクォークの質量を大きく見積もっている[14]の場合の方が$c\bar{c}$のなす系の領域が小さく，与えられるべきα_sは小さいはずである．

しかしながら，α_sは式(31)で与える方が式(7)のときよりも大きくなっており，単純には強い束縛を課していることになる．この理由は，元来[14]では$q\bar{q}$間の閉じ込め中心力$V(r)$[4]に

$$V(r)=\lambda r-\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r}\mathrm{erf}(\sqrt{\pi}Mr)+\frac{L(L+1)}{2\mu_q r^2} \tag{33}$$

を用いており，したがって誤差関数によって$r\to 0$で$\alpha_s\to 0$となる性質をもつために，この限りではm_qをCornellグループより大きいとしてもα_sを大きくできるからである．図8に文献[14]およびCornellグループそれぞれのパラメータに拠るポテンシャル(15)-(17)の振る舞いを，ψおよびΥについて示した．ここに見るように[14]のパラメータでは$V_T(r)$，$V_{LS}(r)$および$V_{ss}(r)$のいずれも原点寄りに強く働く．結果として

[4][14]では、閉じ込めポテンシャルを$V(r)$と表記している。

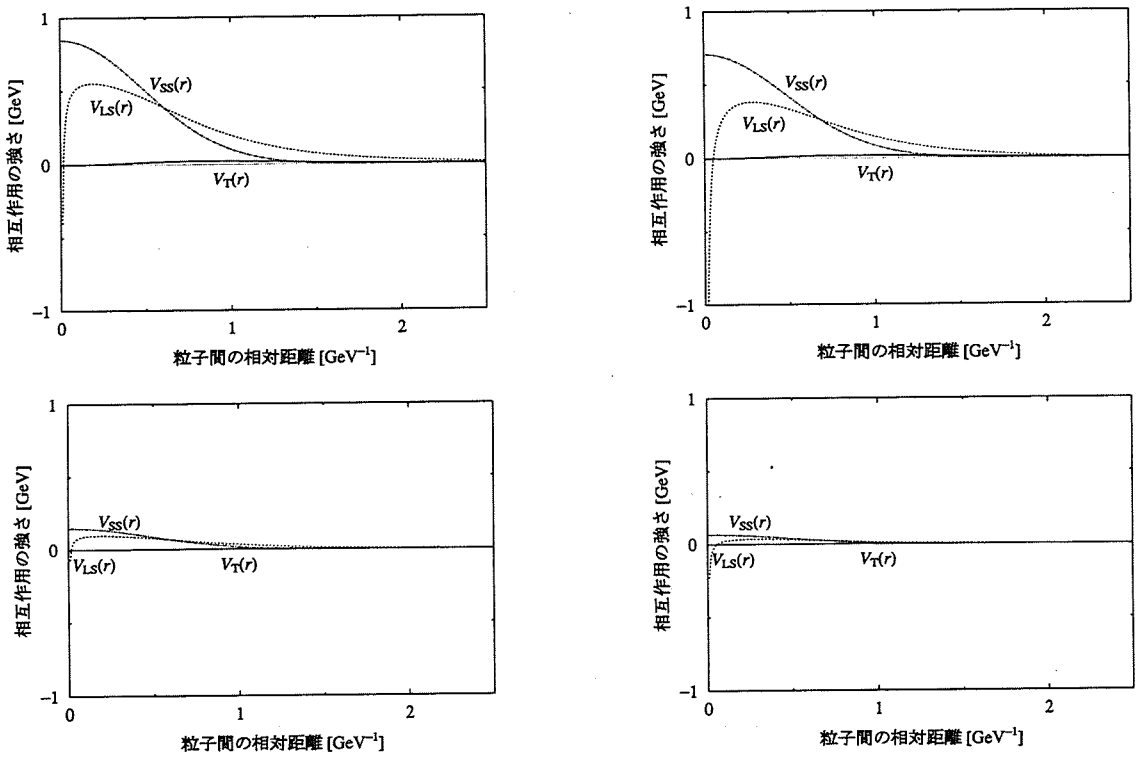

図8：**スピン依存力**．上の2つの図がψの，下2つがΥのスピン依存力である．なお，それぞれ左図は[14]のパラメータに依り，右図が[5]-[10]におけるパラメータに拠る．ψに比べてΥでは3種のどのポテンシャルも小さい．

大きなα_sを設定するこのパラメータで得られる質量と崩壊幅が，スピン依存力の効果を大きく受けたと考えられる．

4　まとめと今後

以上を要約すると，

1．単一開チャネルとの結合を考慮する本論分の取り扱いでは，テンソル力，スピン・軌道力およびスピン・スピン力が重いクォーコニウムψおよびΥの質量準位や崩壊幅に与える寄与はさほど大きくはない．従来扱われてきた非相対論的な取り扱いはその限りでは第一次近似として成立している．

2．しかし，その効果が十分大きいとはいえないとしても，スピン依存力はハドロンを構成するクォークに内在する自由度のもたらす相互作用として，クォーク複合系を扱う枠組みではその存在は無視さるべきものではないと考えられる．

3．重いクォーコニウムの質量準位に関しては，近年，中心力のもとでは多重開チャネル(multi-open channels)問題として扱われてきている．したがって，スピン依存力を含んだ場合についても多重開チャネル問題に展開する必要がある．

4．閉じ込めチャネルでの$q\bar{q}$間相互作用だけではなく，遷移ポテンシャルおよび崩壊後の$M\overline{M}$間のFSIについても，現象論的な取り扱いに限定せず，QCDに基づき素過程から導出することの重要性が指摘されている．[7]-[10] こうした枠組みとの連携についても考えなければならない．

5．本稿は重いクォーコニウムの質量と崩壊幅に対するスピン依存力の効果を調べる課題の第一段階である．今回は閉じ込めチャネルの$q\bar{q}$間スピン依存相互作用のみ取り入れた．むしろ，重いクォークより

以上に軽いクォークが関与する複合系において相対論的効果がより重要になると考えられる，後者が関与する遷移相互作用および終状態相互作用におけるスピン依存力をも取り扱う展開が求められよう．

謝辞

本学の平野雅宣教授から有益なご教示を，宮岡勇二氏および西山真氏にはコメントをいただいたことにお礼申し上げる．数値計算は本学情報処理センターのDEC 4100システムで実行した．

参考文献

[1] J. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D **12**, 2821 (1975).
[2] E. van Beveren, C. Dullemond and G. Rupp, Phys. Rev. D **21**, 772 (1980).
E. van Beverin, G. Rupp, T. A. Rijiken and C. Dullemond, Phys. Rev. D **27**, 1527 (1983).
[3] S. Ono and N. A. Törnqvist, Z. Phys. C **23**, 59 (1984).
N. A. Törnqvist, Phys. Rev. Lett. **53**, 878 (1984).
K. Heikkila, N. A. Törnqvist and S. Ono, Phys. Rev. D **29**, 110 (1984).
[4] D. B. Lichtenberg, J. G. Wills and A. J. Kangas, in *Hadron Spectroscopy −1985*, edited by S. Oneda (AIP Conf. Proc. No. 132), 416 (New York, 1985).
[5] M. Hirano, T. Honda, K. Katō, Y. Matsuda and M. Sakai, Phys. Rev. D **51**, 2353 (1995).
[6] 本間一徳，寺澤　寛，酒井源樹，釧路論集 **31**, 61 (1999).
[7] M. Hirano, Y. Matsuda, T. Honda, K. Katō, R. Nakanishi and M. Sakai, J. Hokkaido Univ. of Education (section II A) **47**-2, 121 (1997).
[8] Y. Matsuda, K. Katō, M. Hirano, R. Nakanishi, M. Sakai and N. Yabusaki, Few-Body Systems **23**, 1 (1997).
[9] M. Hirano, N. Yabusaki, K. Katō, Y. Matsuda and M. Sakai, J. Hokkaido Univ. of Education (Natural Sciences) **50**-1, 9 (1999).
[10] N. Yabusaki, K. Katō, M. Hirano, M. Sakai and Y. Matsuda, Few-Body Systems **28**, 1 (2000).
[11] 酒井源樹，釧路論集 **17**, 17 (1985).
[12] W. S. Jaronski and D. Robson, Phys. Rev. D **32**, 1198 (1985).
[13] I. M. Barbour and J. P. Gilchrist, Z. Phys. C **21**, 357 (1984).
[14] P. Falkensteiner, D. Flamm and F. Schoberl, Phys. Lett. **131B**, 450 (1983).
[15] M. Hirano, K. Iwata, K. Katō and T. Murota, Prog. Theor. Phys. **67**, 1251 (1982).
[16] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane and T. M. Yan, Phys. Rev. Lett. **36**, 500 (1976); Phys. Rev. D **17**, 3090 (1978); D **21**, 203 (1980).
E. Eichten, Phys. Rev. D **22**, 1819 (1980).
[17] Particle Data Group, Eur. Phys. J. C **15**, 1 (2000).
[18] J. Aguilar and J. M. Combes, Commun. Math. Phys. **22**, 269 (1971).
E. Balslev and J. M. Combes, Commun. Math. Phys. **22**, 280 (1971).
B. Simon, Commun. Math. Phys. **27**, 1 (1972).
[19] 加藤幾芳，明　孝之，青山茂義，池田清美，日本物理学会誌，**53**-2, 111 (1998).
[20] B. R. Johnson, J. Chem. Phys. **67**, 4086 (1977); **68**, 4673 (1978).