偏微分方程式特性体の数理物理学的性質

偏微分方程式特性体の数理物理学的性質

奥　田　惠　孝

旭川分校数学研究室

Eko Okuda: On the Property of Characteristic Manifolds of Partial Differential Equations in Mathematical Physics.

特性集合体の概念は偏微分方程式論に於て極めて重要であり数理物理学に於てはこの様な集合体に沿うてだけ偏微分方程式の解の或る不連続性が起り得るという意義を有するため注目されている。クーラントの指針に従つてその概念の一斑を明かにし流体力学への一應用を導きたい。

§1. 二階準線型双曲型偏微分方程式に於ける不連續性

二階準線型微分方程式を

$$(1)\quad L[u]+D=\Sigma a_{ik}u_{ik}+D=0$$

とする、但し係数 $a_{ik}=a_{ki}$ と量 D とは n 個の独立變数 $x_1,\cdots,x_n$ と量 u, 並びに導函数 $u_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ の與えられた函数とし

$$u_{ik}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}$$

と略記する。

特性体の基本的性質[1]は紙数の都合上記述を省略して次の間から始める。

微分方程式 $L[u]=0$ の解 u が次の性質を具備して存在するためには曲面 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=0$ は如何なる條件を滿たさねばならないか；u と一次導函数 u_i，並びに曲面上に於ける量 u_i の凡ての内部導函数は曲面通過に関し連続であつて；$\varphi=0$ から放れ出た量 u_i の導函数、特に導函数 $u_{\varphi\varphi}$ は曲面の通過に関して跳躍を持つた不連続を受けるものとする。

この曲面 $M:\varphi=0$ が特性集合体でなければならないことは特性体の基本的性質から明かである。何となればもしそうでないとすれば一方に於て我々の要求が二次導函数の異なつた値——即ち曲面 M の一方の側もしくは他の側からの二次導函数の極根値が $\varphi=0$ から生ずる與えられた初期帯を積分帯に補修し得ることを示しているのに、他方に於て M に沿うて二次導函数と又凡ての高次導函数が一意に確定される様なことになるであろうから。

次に一次導函数の不連続性を考えるが一次導函数が不連続となる解 u が連続な解の極限の場合として次の様に生ずることを仮定すれば、$L[u]=0$ の解の一次導函数の不連続性が特性集合体に沿うてだけ現れ得る：u は、凡て曲面 $M:\varphi=0$ の近傍で連続であつて一様に有界な導函数 v_i^ν を有する解 $v^1, v^2,\cdots\cdots$ の列の一様な極限とせよ。M を除いた凡ての閉領域に於ける一次及び二次の導函数は又一様に u の相應した導函数に収斂するものとする。一次及び二次の接線導函数は連続であるが、極限函数 u は M に沿うて跳躍的不連続（從つて有界）な M から放れ出た導函数を持つとしよう。

証明、座標變換[2]により集合体 M を $x_n=0$ に變換して考える。もしも M が特性的でないとすれば、M の一点の適当に小さな近傍で

$$a_{nn}(x_1,\cdots\cdots,x_{n-1},0)\neq 0$$

である。a_{nn} で割つて $v=v^\nu$ についての微分方程式を次の形に書くことが出來る。

$$v_{nn}+\sum_{i=1}^{n-1}{}' c_{ni}v_{in}+d_nv_n+\sum_{i=1}^{n-1}{}' d_i v_i+\sum_{i,k=1}^{n-1}{}' c_{ik}v_{ik}$$
$$+ev+f=0$$

それからの微分方程式を限界 $x_n=+\varepsilon$ と $x_n=-\varepsilon$ との間で積分して

$$v_n(x_1,\cdots,x_{n-1},\varepsilon)-v_n(x_1,\cdots,x_{n-1},-\varepsilon)+\cdots=0$$

を得る、その際点々で A を ν に無関係な正の限界とするとき絶対値が $A\varepsilon$ より小なる式が表されている。故に固定された ε に対して

$$|v_n(x_1,\cdots,x_{n-1},\varepsilon)-v_n(x_1,\cdots,x_{n-1},-\varepsilon)|<A\varepsilon.$$
$$\therefore\quad |u_n(x_1,\cdots,x_{n-1},\varepsilon)-u_n(x_1,\cdots,x_{n-1},-\varepsilon)|\leqq A\varepsilon.$$

從つて $\varepsilon\to 0$ に対して u の M から放れ出た一次導函数 u_n は我々の仮定に反して跳躍を持ち得ないことゝなる。故に M 上で $a_{nn}(x_1,\cdots,x_{n-1},0)=0$ が成立せねばならない、即ち M は特性的でなければならない。（証明終）

更に曲面 M が、それに沿うて u が

$u=U\varphi^{\alpha}(x_1,\cdots,x_n),\qquad (\alpha<0)$

なる形で無限大になる u についての不連続曲面である場合に曲面 $\varphi=0$ は特性集合体でなければならない、但しUは連続微分可能とする。証明、微分式 $L[u]$ に $u=U\varphi^{\alpha}$ を入れ $\alpha(\alpha-1)U\varphi^{\alpha-2}(\Sigma a_{ik}\varphi_i\varphi_k)+\alpha\varphi^{\alpha-1}\{L'[\varphi]U+2\Sigma a_{ik}\varphi_i U_k\}+\varphi^{\alpha}L[U]$ と書き $\varphi^{2-\alpha}$ を乘じ $\varphi\to 0$ とすれば $L[u]=0$ から $\varphi=0$ に対して特性体條件

$$(2)\qquad \sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i\varphi_k=0$$

が生ずる。

次に $\varphi=0$ だけでなくて全函数群 $\varphi=\mathrm{const.}$ が特性的と仮定すれば——曲面 $\varphi=0$ はこの様な群に包含されると考え得る——微分方程式の初項はなくなる。それから $L[u]$ に $\varphi^{1-\alpha}$ を乘じ、$\varphi=0$ と置けば、特性集合体 $\varphi=0$ 上で U に対する條件を表す関係式

$$L'[\varphi]U+2\Sigma a_{ik}U_i\varphi_k=0$$

が生ずる。特性射線の関係式

$$\dot{x}_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\varphi_k$$

$$\frac{\partial}{\partial s}=\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_k\frac{\partial}{\partial x_i}$$

からこの條件を直ちに

$$(3)\qquad 2\frac{\partial U}{\partial \Delta}+AU=0$$

なる形に置くことが出來る、但し

$$A=L'[\varphi]=\Sigma a_{ik}\varphi_{ik}+\Sigma b_i\varphi_i$$

である。よつて

特性射線に沿う不連續量の係数 U は線型同次常微分方程式を滿足する。

この射線に沿うて A を s の與えられた函数と見なし $s=0$ に対して $U=U_0$ となるときは射線上で一般に

$$U(s)=U_0 e^{-\frac{1}{2}\int_0^s A(\tau)d\tau}$$

故に不連續量 U はそれが恒等的に零でないとき既知の狀態で特性射線に沿うて傳わり零とはなり得ない。

§2. 特性集合体に沿う微分方程式と射線に沿う不連續の傳達

傳達関係式 (3) は種々の種類の不連續の强さに対して不變である、これを微分方程式

$$(4)\qquad \Sigma a_{ik}u_{ik}+\Sigma b_i u_i+cu=0$$

の予め與えられた集合体 $\varphi=0$, 特に特性集合体に沿うての事情を詳しく分析して証明しよう。一般性を失うことなく $\varphi=0$ 又は曲面群 $\varphi=c$ を座標平面 $x_n=0$ もしくは平面群 $x_n=c$ に變換されると考えて差支えない。

微分方程式を

$$(5)\qquad \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}u_{ik}+\sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i+cu+a_{nn}u_{nn}+2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}u_{in}+b_n u_n=0$$

なる形に書き、或は集合体 M： $x_n=0$ 上の内部導函数だけを含む式を総括して J と表せば

$$J+a_{nn}u_{nn}+b_n u_n+2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}u_{in}+b_n u_n=0$$

となる。曲面 $x_n=0$ 又は一般に曲面 $x_n=c$ に対して横断微分の定義

$$\frac{\partial x_i}{\partial s}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial x_n}{\partial x_k}=a_{in}$$

及び M 上で $u_n=v$ の略記を用うれば

$$(6)\qquad J+a_{nn}v_n+2\frac{\partial v}{\partial s}+b_n v=0$$

に移る。

集合体 M が特性的であれば、その上で $a_{nn}=0$ であり $\frac{\partial}{\partial s}$ は内部導函数である。故に

Mが特性集合体であれば方程式 (6) は u の M から放れ出た導函数vに対する條件を表す。

$M: x_n=0$ が特性集合体であるとき (6) は M 上で

$$(7)\qquad J+2\frac{\partial v}{\partial s}+b_n v=0$$

となる。然るに

$$A=L'[\varphi]=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_{ik}+\sum_{i=1}^{n} b_i\varphi_i$$

は座標變換に対して不變である。[3] $L'[\varphi]=b_n$ が $\varphi=x_n$ に対して成立するので一般に任意の特性集合体 $\varphi=0$ に対して (7) を

$$(8)\qquad J+2\frac{\partial v}{\partial s}+Av=0$$

なる形に書くことが出來る、その際

$$A=L'[\varphi]=\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_{ik}+\Sigma b_i\varphi_i$$

は集合体に沿うて既知の式である。この方程式 (8) は特性集合体 M に沿うて放れ出た導函数 $v=u_\varphi$ についての一階線型常微分方程式を表し、而も媒介變数 s で特性集合体 M を作る射線の各々に対して成立する。

今跳躍量の関係式を次の様にして得る：差し当つて放れ出た導函数 $u_\varphi=v$ が跳躍

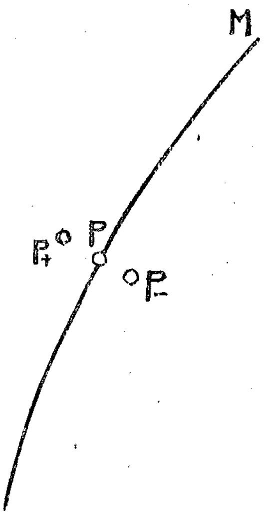
$$(u_\varphi)=(v)=k$$

を受けるとし、Mに沿うて函数uが連續且つuの接線導函数（内部導函数）も連續とする。この跳躍度kを媒介變数sなるM上の射線に沿うて追求し、方程式(6)をMの異なつた二面上の二点 p_+, p_- で書いて減じ、p_+ と P_- とをMの一点Pにずらす。それからMを再び $x_n=0$ なる形で考え條件 $a_{nn}=0$ とJが連續的にMを通ることを考慮すれば

$$A=b_n=L'(\varphi)$$

について

$$(9)\quad 2\frac{\partial k}{\partial s}+Ak=0$$



を得る。即ち跳躍度kは射線に沿うて(3)のUと同じ法則で傳わる。それが少くとも一点で零でなければ射線に沿うて如何なる点でも零とはなり得ない。

uの一次導函数が連續的にMを通過し、一次導函数の内部微分によつて得られる二次導函数も連續的にMを通過するとすれば、二次導函数の跳躍が二次の放れ出た導函数の跳躍

$$k=(u_{\varphi\varphi})=(v_\varphi)$$

によつて定められる。特性集合体 $\varphi=0$ が特性集合体の群 $\varphi=c$ に一般性を失うことなく含まれると仮定されゝば又この跳躍量 $(u_{\varphi\varphi})$ に対して傳達関係式(9)が成立する。

この証明には先づ特性集合体を曲面 $x_n=c$ に變形されると考え、方程式 6 から出發してこれを x_n で微分し、上記の考慮を反復すれば出來る。その際量 J, $\frac{\partial J}{\partial x_n}$, … が連續的に M を通過し $a_{nn}=0$ が $x_1,\cdots,x_{n-1}$; x_n について恒等的に成立することを注意する必要がある。

この様な不連續性が先ず高次導函数に現れるとき、全く同一の跳躍関係形式が同一の証明法で高次導函数の跳躍度に対して成立し；前節で述べた様な不連續性を有するuそのものについてもそこの仮定の下で又同一形式の跳躍度を持つことが示される。

§3. 特性体の物理學的解釋

特性体と特性射線との直観的意味は $x_n=x_{m+1}=t$ を時間變数とし x− 空間 R_m を前進する波面 $t=\psi(x_1,\cdots,x_m)$ とそれを切る線に対應させることによつて説明される。前節(9)の示すことは：この様な進行波面上に或る瞬間に一点で解 $u(x_1,\cdots,x_m,t)$ の考えている様な不連續が存するときは、この不連續の度合が上記の法則(9)によつて初期点を通る射線に沿うて傳わる。又曲面 $\psi=0$ 上で時間 $t=0$ に対して小部分で既にuの一次導函数が不連續であるか、さもなければこの初期曲面上で導函数の高次の跳躍だけが存するという様なときには、不連續の部分はそれを通る射線束に沿うて明瞭に限られた部分として継續するであろう。所謂影の限界の現象が表される。

§4. 連立微分方程式の特性体と流体力學への應用

数理物理学の多くの問題は一階連立微分方程式に関するものであるが前述の特性体の概念が殆ど同様に当てはまる。今独立變数 $x_1,\cdots,x_n$；求める函数 $u_1,\cdots,u_m$ なる連立微分方程式を

$$(10)\quad \sum_{k=1}^{m} L_{ik}[u_k]=g_i \qquad (i=1,\cdots\cdots,m)$$

と書く、但し

$$L_{ik}=\sum_{r=1}^{n} a_{ik}^{r}\frac{\partial}{\partial x_r}$$

と略記してある。そのとき特性体は $\varphi=0$ について偏微分方程式

$$(11)\quad \begin{vmatrix} \Sigma a_{11}^{r}\varphi_r & \Sigma a_{12}^{r}\varphi_r \cdots\cdots\cdots\cdots & \Sigma a_{1m}^{r}\varphi_r \\ \Sigma a_{21}^{r}\varphi_r & \Sigma a_{22}^{r}\varphi_r \cdots\cdots\cdots\cdots & \Sigma a_{2m}^{r}\varphi_r \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \Sigma a_{m1}^{r}\varphi_r & \Sigma a_{m2}^{r}\varphi_r \cdots\cdots\cdots & \Sigma a_{mm}^{r}\varphi_r \end{vmatrix}=0$$

を條件として満足する。解 u_k の一次導函数の跳躍的不連續を、その他の量の連續性を仮定して、$\varphi=0$ から放れ出た導函数の一意性が成立しないことから(11)の條件の下に得る。

又導函数を初め其の他の量の連續の仮定の下に解 u_k の

$u_k=U_k\varphi^{\alpha}$ $(k=1,\cdots,m)$ $\alpha<0$, U は連續微分可能

という様な不連續性を成立させるためにも(11)は必要である。何となれば §1 に於ける如く(10)の左辺に $u_k=U_k\varphi^{\alpha}$ を代入し

$$\varphi^{\alpha}\sum_{k=1}^{m} L_{ik}[U_k]+\alpha\varphi^{\alpha-1}\sum_{k=1}^{m} U_k L_{ik}[\varphi_k]=g_i$$

これに $\varphi^{1-\alpha}$ を乗じて $\varphi=0$ とすれば

(12)　$\sum_{k=1}^{m} U_k L_{ik}[\varphi_k]=0 \qquad (i=1,\cdots,m)$

が出る。然るに（11）の行列式の各列に U_k 等を乗じて総和したものは（12）の左辺であるから（11）は成立することゝなる。

特性体及び特性関係の概念は高階微分方程式及び連立微分方程式に関しても拡張し得るが今形式的議論を避けて非線型問題に対する例として平面に於ける圧縮性流体の流体力学に於ける連立微分方程式を考える。

速度成分を $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, 流体の密度を $\rho(x, y, t)$, $p(\rho)$ を $p'(\rho)>0$ なる圧力函数とすれば準線型のオイラーの運動方程式は

$$\begin{cases} \rho u_t + \rho u u_x + \rho v u_y + p'\rho_x = 0 \\ \rho v_t + \rho u v_x + \rho v v_y + p'\rho_y = 0 \\ \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + \rho(u_x + v_y) = 0 \end{cases}$$

となる。$\varphi(x, y, t)=0$ をそれに沿うて u, v, ρ が與えられる様な初期集合体とせよ。特性体條件は $\varphi=0$ について

$$\begin{vmatrix} \rho(\varphi_t+u\varphi_x+v\varphi_y) & 0 & p'\varphi_x \\ 0 & \rho(\varphi_t+u\varphi_x+v\varphi_y) & p'\varphi_y \\ \rho\varphi_x & \rho\varphi_y & \varphi_t+u\varphi_x+v\varphi_y \end{vmatrix} = 0$$

即ち

$D=\rho^2(\varphi_t+u\varphi_x+v\varphi_y)\{(\varphi_t+u\varphi_x+v\varphi_y)^2-p'(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\}$ $=0$ であつて $\varphi=0$ に沿うて $D\neq0$ ならばこの初期集合体に沿うて初期値から u, v, ρ の凡ての導函数、特に外向き導函数 $u_\varphi, v_\varphi, \rho_\varphi$ が一意確定となり $D=0$ ならば $\varphi=0$ は特性体となる。$\varphi=t-\psi(x, y)$ と置いて出來る x, y, t 一空間の特性曲面或は x, y- 平面の相当曲線群 $t=\psi(x, y)$ は流体運動の際起り得べき不連続集合体或は波面である。$D=0$ は

$$\rho^2(1-u\psi_x-v\psi_y)\{(1-u\psi_x-v\psi_y)^2-p'(\psi_x^2+\psi_y^2)\}=0,$$

或は曲面 $\psi(x, y, t)=0$ の法線の方向余弦を t_v, x_v, y_v を用いて

$$\rho^2(t_v+ux_v+vy_v)\{(t_v+ux_v+vy_v)^2-p'(x_v^2+y_v^2)\}=0$$

と書ける。故に特性体として先ず

$$\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y = 0$$

或は

$$t_v + ux_v + vy_v = 0$$

によつて與えられる形成体を得る。この射線の x, y 一平面上への射影は流線であり、三次元 $x, y\ t$ 一空間の射線自身は $\frac{dx}{dt}=u,\ \frac{dy}{dt}=v$ で表され、従つて流速と同時に流線を表す。

特性体の後者の形は $\varphi=0$ 上で

$$(\varphi_t+u\varphi_x+v\varphi_y)^2-p'(\varphi_x^2+\varphi_y^2)=0$$

或は

$$(t_v+ux_v+vy_v)^2-p'(x_v^2+y_v^2)=0$$

で與えられる。比 $dt:dx:dy$ によつて與えられる射線即ち複特性体は不連続に対して傳播速度即ち射線速度を表し、この特性体の偏微分方程式に属するモンヂュの錐面のモンヂュの方程式は

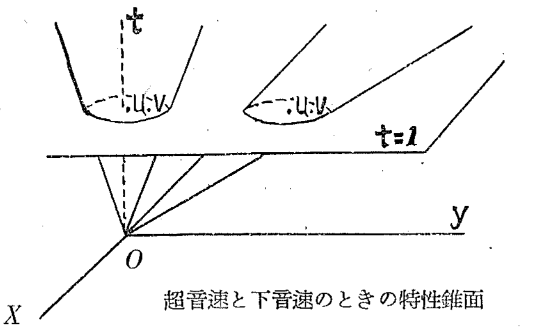
$$\left(\frac{dx}{dt}-u\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-v\right)^2=p'$$

となる。音響学或は流体力学では $\sqrt{p'}$ は音速と称せられ、この方程式は流れに対する不連続傳播の相対速度が音速に等しいことを示している。

與えられた u と v とについて例えば原点 $x=y=t=0$ に頂点を持つ x, y 一空間の特性微分方程式のモンヂュの錐面は方程式

$$\left(\frac{x}{t}-u\right)^2+\left(\frac{y}{t}-v\right)^2=p'(\rho)$$

で與えられている。この錐面を平面 $t=1$ で切れば切り口は $(x-u)^2+(y-v)^2=p'$ なる円で、この円が原点 $x=y=0$ を囲むか否かによつて即ち $u^2+v^2<p'$ か $u^2+v^2>p'$ に従つてこの錐面は t 一軸を含むか含まないかである。さて定常の場合の状態を考えようと思うのであるが、これは t に関する導函数を凡て零と置けば得られることは明かである。考えているモンヂュの錐面のうちで



超音速と下音速のときの特性錐面

唯 $\varphi_t=0$ である様な、即ち x, y 一平面に垂直――t 軸を含む接平面の様なものが問題でそれと錐面との接触直線が定常の場合の両特性方向を與える。故に t 軸が錐面の外にあるとき、即ち流速 $\sqrt{u^2+v^2}$ が音速 $\sqrt{p'}$ より大なる場合に、而もそのときに限つて t 一軸を通るモンヂュの錐面への両接平面が実で異なるから二特性方向が與えられるのである。

この定常の場合については近似的な量を附加することによつて容易に実験し得る、速度 u が x 軸に平行な一定速度 U と微小量 ω だけ異なり、密度 ρ も一定の密度 P と僅かに σ だけ異なるものとする。又 λ も微小な量とす

る：

$$u=U+\omega,\qquad v=\lambda,\qquad \rho=P+\sigma$$

更に微分方程式に於て ω, λ, σ とその導函数との積と高次の冪を省略しても流体の運動が十分綿密に表されるものと見なすと最初の連立方程式は定数係数の連立線型微分方程式

$$\begin{cases} PU\omega_x + p'\sigma_x = 0 \\ PU\lambda_x + p'\sigma_y = 0 \\ U\sigma_x + P(\omega_x + \lambda_y) = 0 \end{cases}$$

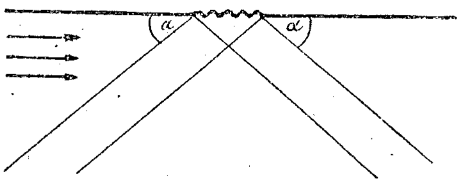
で置きかえられる。直ちに所謂「渦流定理」を表す関係式

$$\omega_{xy} = \lambda_{xx}$$

即ち $\omega_y - \lambda_x = f(y)$

並びに別な連立方程式

$$\begin{cases} kP\lambda_x + \sqrt{p'}\,\sigma_y = 0 \\ (1-k^2)\sqrt{p'}_x - kP\lambda_y = 0 \end{cases} \qquad \left(K = \frac{U}{\sqrt{p'}}\right)$$



を得、それから消去によつて二微分方程式

$$(1-k^2)\lambda_{xx} + \lambda_{yy} = 0$$
$$(1-k^2)\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0$$

が得られる。この方程式は $k>1$ 即ち $U>\sqrt{p'}$ なるとき双曲型となり、特性体は x－軸に対して $|\sin\alpha| = \frac{1}{k} = \frac{\sqrt{p'}}{U}$ なる角 α で傾いている直線である。原速 U の壁に平行な半空間の液体或は氣体の運動を考え、壁の一区間 AB にそこで速度の小さな垂直成分 λ を惹き起す小粗度或は小隆起を設けることによつてこの例を物理的に実現することが出來る。この運動が近似された連立微分方程式で表されるという仮定の下に、この粗度はそのとき壁に対して角 α だけ傾いて AB で壁に突き当る二個の平行帯に沿う流域に於て持続される。

註 1.

R. Courant & D. Hilbert: Methoden der mathematischen Phisik, 2 Bd. 1937. の第二章 § 1〜3, 附 § 1.; 第五章 § 1, 2. 附 § 3.; 第六章 § 1〜3 に委しく特に第六章 § 1. に二階準線型の場合がよく書いてある。

註 2, 3.

同書第六章 § 1 の 2. 参照。

(1950. II. 24.)

粘流助走距離の理論的考察

沢　田　孝　士

旭川分校物理学研究室

Takashi Sawada: The Theoretical Consideration of the Taxiing Length of Laminar Elow

1. 考察の目的

円管中に粘性流体を流すとき、管の入口より一定の距離だけ流れた后、Poiseuille の法則で示される如き速度分布の層流が完成する。この距離を粘流助走距離（die Länge der laminaren Anlaufstrecke）と名付ける。今 Reynolds 数を R で示すと

$$R = \frac{2\rho\gamma\bar{u}}{\mu} \qquad (1)$$

である。こゝで ρ は流体の密度、r は管の半径、$\bar{u}$ は平均速度、μ は粘性係数である。Schiller[1] は粘流助走距離 l_a と R との間に次の関係あることを理論的に見出した：

$$\frac{l_a}{rR} = 0.0575 \qquad (2)$$

然るに Nikuradse の実験によると 0.0575 の代りに 0.125 となるという。

筆者はこの理論値と実驗値の相異の來る理由を次の節で明にし度い。

2. 本　論

第1図に於いて A は流体が殆ど靜止してゐると見做される点、B は管の入口であつて、流体は平均速度 $\bar{u}$ で管中を一様に流れてゐる点、C は抛物線速度分布の完成した点で、計算の結果によると、中心の速度 u_0 は $u_0 = 2\bar{u}$ である。C から D 迄の間では流線の變化はない。A, B,