「問題解決の授業」の実践から見る「問題」の推移に関する一考察：提示する「問題」の推移型と非推移型に着目して

メタデータ	言語: Japanese
	出版者:
	公開日: 2016-09-30
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 谷地元, 直樹
	メールアドレス:
	所属:
URL	https://doi.org/10.32150/00006447

北海道教育大学紀要（教育科学編）第67巻　第１号　　平 成 28 年 8 月
Journal of Hokkaido University of Education（Education）Vol. 67, No.1　　August, 2016

「問題解決の授業」の実践から見る「問題」の推移に関する一考察

― 提示する「問題」の推移型と非推移型に着目して ―

谷地元　直　樹

北海道教育大学附属旭川中学校

A Change in “Problems” Based on Practical “Problem-solving Teaching”

― Focusing on Two Types of “Problems”, Change Type and Non-change Type ―

YACHIMOTO Naoki

Asahikawa Junior High School Attached to Hokkaido University of Education

概　要

本研究は，「問題解決の授業」の導入場面において提示する「問題」に着目し，これまで実践してきた「問題」には，修正が行われていない問題（非推移型）と修正が行われている問題（推移型）があることを分析・考察し，「推移型の問題」における改善・修正の視点を明らかにすること，そして実践研究から得られた知見をまとめ，「問題づくり」の視点を提案することを研究のねらいとしている。

本研究で扱うものは，筆者が18年間実践してきた「授業記録ノート」に着目し，「問題」の構成要素（図，式，数値などと問題文）がどのように推移しているのかを確認した。また，その中から「推移型の問題」と「非推移型の問題」の具体例を取り上げ，その指導場面における教師の意図などを明らかにした。

いくつか実践例を基に時系列で比較検討した結果，「問題」には推移型と非推移型があり，それぞれにその根拠が存在していることが確認できた。また，「推移型の問題」の修正理由としては，「問題が本時の目標に焦点化されていない」「問題から生じる生徒の問いに自然性がない」などがあり，これらの理由は数学の授業改善につながる視点でもあることが確認できた。さらに，本研究から得た知見から「問題づくり」の視点を３点にまとめ，「教師の意図的な働きかけ」も効果的であることを具体例から提案することができた。

1．研究のねらい

算数・数学教育の研究においては，理論研究を基にして実践研究を行い，そこから事実となった成果を広く汎用させながら，日常的な指導に結び付けることが必要である。日本の算数・数学で「よい授業」が行われている背景には，教師による授業実践が重要であり，日常的に授業改善が一体となって行われていることも着目すべきである。

学習指導要領解説編－数学－では，問題解決的な学習の必要性が明記されており，「問題」から授業を展開し，生徒に新たな知識や技能を習得させていく授業スタイルが一般的である。筆者も「問題解決の授業」を18年間実践してきた一人であり，導入場面では「問題」を提示することから授業を行い，本時の目標の達成に向けた授業を構築している。

数学の指導では，複数の学級を担当したり，複数年の間に何度か同じ学年を担当する場合が多くあるため，指導計画を立案する上で，過去の授業の記録内容や指導案などを加筆・修正することが頻繁にある。その中で，同一内容を指導する際には，提示する「問題」が全く同じである場合と回数を重ねるごとに「問題」が推移している場合があることに気付いた。そこで，導入場面において提示する「問題」に着目し，これまで幾度か提示してきた「問題」には修正が行われていない問題（非推移型）と修正が行われている問題（推移型）があることを確認するとともに，推移の根拠とその視点を明らかにすることを研究のねらいとしている。

2．研究の方法

研究を進めるに当たっては，先行研究やこれまでの実践研究を基に「問題」がもつ意味と意義を明らかにし，「問題」の提示方法などについて確認する。また，「推移型の問題」と「非推移型の問題」の例を基にしながら，それぞれの根拠を見いだし具体的に分析・考察していく。

本研究で扱うものは，筆者が18年間実践してきた「授業記録ノート」に着目し，幾度となく扱っている「問題」の構成要素（図・式・数値などと問題文）がどのように推移しているのかを確認していく。

最後にこれらの分析・考察を踏まえて，実践研究から得られた知見をまとめる。また，「問題解決の授業」における「問題づくり」の視点を，具体例を通じて提案していく。

3．研究の内容

⑴　「問題」がもつ意味

数学の授業に限らず，日常生活における様々な「問題」を解決していく際には，G. ポリアによる右の４段階を踏まえて考えることが多くある。このように学習指導法に目を向けると，「問題解決の授業」を行うことの必要性を強く感じることができ，筆者は相馬氏が提唱する「問題解決の授業」を日常的に実践している。なかでも導入段階における「問題」は，授業の中核をなしている。「問題」そのものの内容や提示方法などによって，課題に至るまでの流れや課題解決に向かう学習過程に大きく左右される。そのため，第一に「問題」を工夫することが効果的であり，本時の目標達成に向けて念入りに吟味することが重要である。そもそも，「問題解決の授業」における「問題」とは，次のような位置付けにある。

①問題の理解
②計画の立案
③計画の実行
④振り返り

生徒自らが問いをもち，課題解決への意欲を喚起させることができる。

ここでの「問題」とは，生徒のより深い数学的思考を育成することをねらいとした学習に適した「問題」を指しており，単なる導入問題や応用問題とは区別することができる。

「問題解決の授業」では，与える「問題」の善し悪しが，本時の目標達成に大きく関わってくる。筆者は「よい問題」の条件として，相馬氏が述べ

る①，②の条件に③を新たに加えて，次の３点とおさえている。[1]

①生徒の学習意欲を引き出すことのできる問題。
②問題の解決過程で，新たな指導内容を身に付けさせることのできる問題。
③学習過程の中で，思考を重視することができる問題。

この条件を満たす「問題」を提示し，その解決を目指して生徒が考え続けていく授業こそが，学習指導要領で求められている問題解決的な学習の主旨に沿った指導法である。さらに筆者は，「問題の工夫」を授業改善につながる１つの方法と捉えており，これまでの実践研究を基にその意義を次の２点にまとめている。[2]

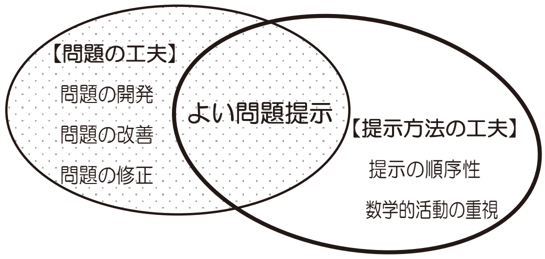
ア：本時の課題が明確になり，考え合う授業を行うことができる。
イ：数学的活動（予想する活動，比較検討する活動）を充実することができる。

⑵　「問題」の提示方法について

「よい問題」を作り上げたとしても，それを導入場面で生徒に与えていくためには，「問題」の提示方法を吟味する必要がある。特に，若年層の教員や教育実習生の授業参観，並びに研究協議などを参観する機会などから，「問題の工夫」については，次のような課題が明らかとなっている。

・先行研究を踏まえて「問題」を工夫して提示しているが,「問題」が授業に生かされていない。
・事例集が多数出版されていて，同様に実践してみるが，うまく授業することができない。

このように，「よい問題を提示しても上手くいかない」と答える教師が多くいる原因は何だろうか。筆者は,「問題の工夫」と「提示方法の工夫」が包摂されている部分で，問題提示が適切に行われていないことがその大きな原因だと考えた。そこで，［図１］のように，よい問題提示に必要な２つの要件をまとめた。[3]



［**図１**：よい問題提示に必要な２つの要件］

図１の左側は「問題の工夫」そのものである。ここでは「決定問題」の形で提示することを基本とし，「問題の開発→問題の改善→問題の修正」を図りながら「問題」を工夫していくことが，よい問題提示を行うための要件の１つとなる。次に図１の右側は,「問題」を効果的に与えるための「提示方法の工夫」である。ここでは問題提示の順序性や数学的活動の取り入れ方などを明らかにし，「決定問題」のタイプに応じて提示方法を工夫していくことが２つ目の要件となる。

岡本氏らは, 生徒が「問い」をもつためには「何らかの契機ないしは動因となり得る教師からの情報提示や働きかけが必要である」と述べており，その具体的方法を３つに示している。[4] この情報提示や働きかけは，本稿で述べる「問題の提示方法」を指しており，その善し悪しは，問題解決への「動機づけ」に影響を与えると考える。また田中氏は,「同じ問題を提示しても，提示方法によって生徒の反応が異なったり，授業の流れが違ってくる」と述べており，問題提示から課題設定までの段階に焦点を当てた研究を行っている。[5]

先行研究からも問題自体が課題解決への意識高揚に与える効果は大きく，問題提示の内容を振り返る研究には価値があると考える。それだけに，「問題の工夫」と「提示方法の工夫」に焦点を当てることで，授業の様相が明らかになると言っても過言ではない。

⑶　「決定問題」の形による「問題の工夫」

「問題の工夫」は，複雑な「問題」を与えるのではなく，生徒の実態や教師自身の授業スタイルに即してアレンジすることが大切だと考える。相

馬氏は，著書の中で「問題づくり」の工夫の視点を，次の通り５つ示している。(6)

A	決定問題の形に変える
B	数値を工夫する
C	図形の向きや大きさを工夫する
D	できるだけ単純な形にする
E	つまづきを生かす

筆者はその中でも「A：決定問題の形に変える」ことを,「問題の工夫」の基本形と位置付けている。その理由は次の３点からである。

・問題が簡潔に提示できるので理解しやすい。
・問題解決への興味や関心を引き出しやすい。
・既存の問題を改善したり修正しやすい。

特に,「問題」を理解してその趣旨を掴むことや，問題解決への動機づけとすることは,「決定問題」の形で与えることの意義につながる。また，「決定問題」の形に改善する際には，Ｂ～Ｅの工夫が必然的に盛り込まれていく場合がある。

ここで，「決定問題」の形は，次のような４つのタイプに分けることができる。(7)

①「～はいくつか」	〈求答タイプ〉
②「～はどれか」	〈選択タイプ〉
③「～は正しいか」	〈正誤タイプ〉
④「～はどんなことがいえるか」	〈発見タイプ〉

この４つのタイプを基にした「決定問題」は，できるだけ単純な「問題」であることが望ましく，それによって生徒が自分の考えをもつとともに，ある程度の判断や結論に至ることが重要である。

さて，数学教育においては，「問題」の提示方法を分類した先行研究はほとんど無い。そこで本稿では,「決定問題」による提示方法を参考にし,「問題」を作成する上での主な内容となる構成要素を次の２つに分けることにした。

〈問題提示に関わる構成要素〉
　α：図・式・数値など　　β：問題文

構成要素αとは，提示する「問題」において，対象となる図・式・数値・表・グラフなどを指している。また，構成要素βとは，板書もしくは口頭などで伝える問題文を指している。問題提示においてこれら２つの構成要素α・βが，どのように推移しているのかを，具体例を通じて分析・考察していくことにした。

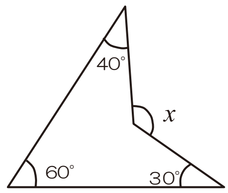
⑷　「非推移型の問題」の２つの具体例

【問題１】：第２学年「平行と合同」

筆者はこれまでに第２学年を７年間指導している。非推移型の問題例として取り上げる【問題１】は，平行線と角の性質や，多角形の内角や外角の性質を活用して角を求めることで，証明することの意味を理解することをねらいとした授業であり，同じ場面で継続して提示している。

提示した「問題」は，教科書（教育出版）にあるブーメラン型の四角形を基にしており，数値や図を工夫しながら求答タイプの「決定問題」で出題している。なお,「問題」と主な授業の流れは，次の通りである。

【問題１】
右の図で，$\angle x$ は何度だろうか？



〈授業の流れ〉

①直観的に答えを予想させた後，個人思考する時間を与える。机間指導の中で補助線の引き方を紹介し，黒板に求め方を書かせる。
②既習内容である平行線の性質や三角形の角の性質を根拠としながら，$\angle x$ の大きさを求める方法を全体で確認する。
③$\angle x = 130°$ になることを確認した後に,「どんなブーメラン型の四角形でも，$\angle x$ は３つの内角をたせば求めることができるのだろうか？」と問いかける。
④凹型四角形の図形を一般化させて考えても，既習内容を根拠として，その性質を説明できることを知る。
⑤本時の学習を確認する意味で，確認問題を提示し，生徒とのやりとりを基にしながら答えをお

さえていく。

⑥凹型四角形の図形を拡張して考えさせたり，証明の意味を深めるために，教科書の問題を通じて定着を図る。

この【問題１】における問題提示に関わる構成要素α・βの推移は，【表１】の通りである。

【表１：過去に提示した「問題」の構成要素】

実施年月日	α(図など)	β（問題文）	思考
2000.10.17	凹型四角形	∠xは何度？	4
2002.11.22	凹型四角形	∠xは何度？	4
2005.10.28	凹型四角形	∠xは何度？	5
2007.11.15	凹型四角形	∠xは何度？	4
2009.11.27	凹型四角形	∠xは何度？	5
2013. 6.19	凹型四角形	∠xは何度？	4
2014.11.27	凹型四角形	∠xは何度？	5

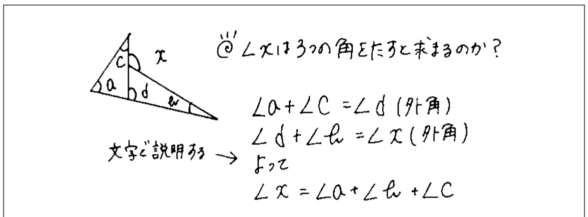
「問題」は板書するだけではなく，多様な考え方を生かして解決できるように，同じ図形を複数載せたプリントを配付している。

表１の結果から，【問題１】はすべての授業において，問題提示に関わる構成要素α・βには変更がないことがわかる。つまり，「非推移型の問題」であることが確認できる。なお，表１の思考の欄は，授業内で取り上げた考え方の数を示している。

この表１と授業実践の結果から，次の４点を読み取ることができる。

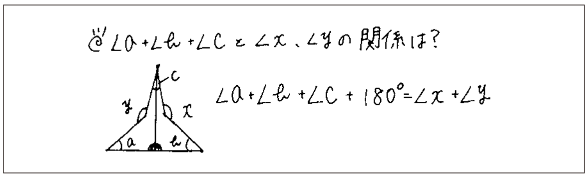
・α（数値）は，凹型四角形の３つの角の大きさが30°，40°，60°のタイプを扱うことで，誤答を含めて多様な考え方を生かして解決できるようにしている。

・α（図の向き）については，次のように一般化する際にも補助線を引いたり，板書内容と比較しながら文字を用いて説明しやすいように，右側を凹型にした図の向きに統一している。



・β（問題文）は，「∠xの大きさは何度だろうか？」という求答タイプの「決定問題」で提示することで，直観的な予想を促している。

・2014年では，授業の終わりにβ（問題文）を発展させた発問を行い，基本の図形を改良した次の図を与えるなどして，さらに追究ができるようにしている。



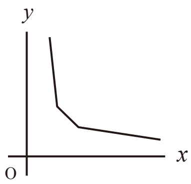
【問題２】：第１学年「比例・反比例」

筆者はこれまでに第１学年を８年間指導している。非推移型の問題例として取り上げる【問題２】は，反比例のグラフの特徴とかき方を理解することをねらいとした授業であり，この「問題」は同じ場面で継続して提示している。また，ここでは式と表から，反比例のグラフの形を考察していくために，誤答を生かした正誤タイプの「決定問題」を出題している。なお，「問題」と主な授業の流れは，次の通りである。

【問題２】

太郎君は，下の表をもとに $y=\dfrac{8}{x}$ のグラフをかいた。正しいだろうか？

x	1	2	4	8
y	8	4	2	1



〈授業の流れ〉

①式から値を確認しながら表を完成させ，それを基にグラフをかいていく。かき終えた段階で「正しいだろうか？」と発問する。

②直観的に予想させると，正しくないと答える生徒が半数以上いる。そこで，「なぜ正しくないのだろうか？」と発問して考える時間を与える。

③生徒からは次のような考えが出されるので，順次取り上げていく。

・座標を直線で結んでいるから。

・負の数もあるので，他にもグラフができる。

・(3，3)を通っているが式には当てはまらない。

④曲線については，その理由を考えさせ，表を基に x と y の変化の仕方（増え方）が比例のときとは異なることに気づかせる。

⑤ x に値の小さい数（＋0.1や－0.1など）を代入することで，原点を通らないことや y 軸付近のグラフの様子を視覚的に理解させる。

⑥正しいグラフがなめらかな曲線になることを確認する。さらに，比例定数が負の数のグラフをかかせ，反比例のグラフの特徴をまとめる。

この【問題２】における問題提示に関わる構成要素α・βの推移は，【表２】の通りである。

【表２：過去に提示した「問題」の構成要素】

実施年月日	α（数値）	β（問題文）	思考
1998.11.16	$a=12$	正しいか？	3
1999.11.11	$a=12$	正しいか？	3
2001.11.20	$a=8$	正しいか？	3
2004.11.22	$a=8$	正しいか？	4
2005.11.24	$a=8$	正しいか？	4
2008.11.28	$a=8$	正しいか？	4
2009.11.12	$a=8$	正しいか？	4
2011.11.24	$a=8$	正しいか？	4

「問題」は黒板に板書して提示し，生徒にはノートに書くように指示している。また，グラフは視覚的に判断しやすいように，誤答であるグラフの部分を赤で印刷して配付している。

表２の結果から，【問題２】はすべての授業において，問題提示に関わる構成要素α・βともに変更がないことがわかる。つまり，「非推移型の問題」であることが確認できる。なお，表２の思考の欄は，授業内で取り上げた誤答の理由の数を示している。2004年から思考が増えているのは，「原点を通っていない」という生徒の考えを扱ったことによる。

この表２と授業実践の結果から，次の４点を読み取ることができる。

・α（数値）は，比例定数を８とし，整数の座標を４点とることができるようにしている。その結果，曲線になるかどうかの話し合いが活発になり，右のように双曲線についての理解を深めることが可能となる。また，1998年と1999年に限っては，比例定数を12としているが，この変更については推移とまでは判断できない。

◎曲線になる？
分数とか小数を代入すると…
↳なめらかな双曲線
原点は通れない！

・α（グラフの形）は，（3，3）を意図的に通るように提示しているため，誤答を生かすことが可能となる。ここでは，次の授業記録ノートのように，代入して反例を見出そうとする生徒が多数いる。

◎間違いはどこ？
・(3, 3)を通っているが，$y=\frac{8}{x}$ に $x=3$ を代入すると $y=\frac{8}{3}$ なので，$(3, \frac{8}{3})$ を通るはず。
・x の値に負の数がない。

x	-1	-2	-4	-8
y	-8	-4	-2	-1

・β（問題文）は，「正しいだろうか？」という正誤タイプの「決定問題」により，直観的に予想ができるようにしている。

・2009年からは，β（問題文）はプリントして配付しているが，それによる推移はないと判断できる。

⑸　「非推移型の問題」からの分析・考察

【問題１】と【問題２】を「非推移型の問題」の具体例として取り上げた。ここで，この２つの「問題」にはなぜ推移が見られなかったのだろうか。「非推移型の問題」となった根拠を，これまでの実践結果から，次のように分析・考察した。

［考察１］
・本時のねらいが明確であり，教師の意図に基づいた「問題の工夫」が既に行われている。
［考察２］
・「問題」の答えを直観的に予想したり，多様な考え方で解決することができている。

「問題」に推移がない根拠の１つは，「問題解決の授業」を行う上で，本時のねらいにそった良問であることがあげられる。つまり，前述した「よ

い問題」の条件①～③（学習意欲の喚起・指導内容の伝達・思考の重視）を満たしていると考えられる。

２つの「問題」はともに視覚的に捉えることができることから，問題把握が容易である上に，直観的に予想することができるタイプである。例えば【問題１】は，答えを出すことだけに学習が留まることなく，図形の概念を一般化させたり，図形を拡張させていくことができる。さらに【問題２】は，誤答を生かしながらグラフの特徴を考えていく授業を構成できる。反比例のグラフの知識や技能を形式的に教え込むことなく，既習内容の式と表を活用させながら発見的に学習を進めることができるようになっている。

こうした本時の目標に向けた意図的な教師の働きかけ（問題の工夫など）が，これらの「問題」には効果的に含められていることが確認できる。

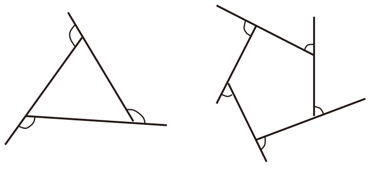
⑹ 「推移型の問題」の２つの具体例

【問題３】：第２学年「平行と合同」

筆者はこれまでに第２学年を７年間指導している。推移型の問題例として取り上げる【問題３】は，多角形の外角の和の求め方を考え，360°であることを理解することをねらいとした授業であり，多角形の内角の和を指導した次時に扱っている。提示している「問題」は，教科書（教育出版）にある図を参考にし，数値や図を工夫しながら「決定問題」のタイプで出題したものである。なお，これまで最も多く扱ってきた「問題」と主な授業の流れは，次の通りである。

【問題３】

三角形と五角形の外角の和は，どちらが大きいだろうか？



〈授業の流れ〉

①ノートに三角形と五角形をかかせる。それぞれの辺を一方向に延長させ，外角をつくり，印をつけさせる。「外角の和はどちらが大きいだろうか？」と発問し，問題文を板書する。

②直観的に予想させると，「同じ」という予想も含めて意見が分かれる。そこで，「外角の和を求めるにはどのようにしたらよいだろうか？」と問いかける。

③個人で考えさせると「分度器で実測する」という意見が出される。実測させると，「どちらも360°になりそうだ」という声があがるので,「必ず言えるだろうか？」と問い返す。

④実測する方法以外で考えさせると，「(内角＋外角）×（角の数）－（内角の和)」を利用して求める考えが出される。それぞれの外角の和を求めて，どちらも同じであることを確認する。

・三角形→180°×3－180°×（3－2）＝360°

・五角形→180°×5－180°×（5－2）＝360°

⑤「他の多角形の外角の和も360°だろうか？」と問いかけて，「ｎ角形の外角の和は？」という課題を提示する。④での考えを基にしながら，ｎ角形→180°×ｎ－180°×（ｎ－2）＝360°となり，どんな多角形でも外角の和が360°になることを確認する。

⑥教科書で多角形の外角の和について確認する。また，具体的に外角の和を用いた練習問題に取り組ませる。

この【問題３】における問題提示に関わる構成要素α・βの推移は，【表３】の通りである。

【表３：過去に提示した「問題」の構成要素】

実施年月日	α（図・値）	β（問題文）	思考
2000.10.11	４・６角形	和は同じか？	2
2002.11. 5	３・６角形	和は同じか？	2
2005.10.19	３・４角形	大きいのは？	3
2006.11. 7	５・６角形	大きいのは？	3
2009.11.16	３・５角形	大きいのは？	3
2012. 6.13	３・５角形	大きいのは？	4
2014.11. 5	３・５角形	大きいのは？	4

問題提示では，２つの多角形の図は定規でかかせるようにしており，視覚的に判断しやすいよう

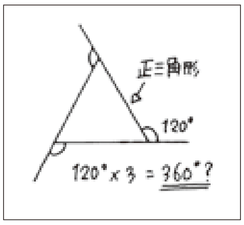
にそれぞれの外角の部分には色で印を付けるように指示している。

表３の結果から，【問題３】は幾度かの授業において，問題提示に関わる構成要素α・βに変更があることがわかる。つまり，「推移型の問題」であることが確認できる。なお，思考の欄は，授業内で取り上げた説明の方法の数を示している。説明の方法が回数を重ねるごとに増えているのは，本校で扱っている教科書や他社の教科に掲載されている説明の方法（図形の平行移動など）を紹介しているからである。

この表３と授業実践の結果から，次の４点を読み取ることができる。

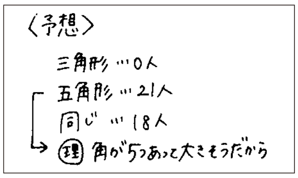
・α（数値）は，「角の数が多い方が外角の和も大きい」と予想する生徒が多数いることから，角の数の差を２にして提示するように変化している。教科書では五角形を扱っているものが多くあるので，提示した「問題」と関連させやすいことがわかった。

・α（図）は三角形を扱うことで，正三角形などの特殊な図を用いて外角の和を求める生徒も多くいることから，外角の和を求める活動にスムーズに移行できるようになっている。



・β（問題文）は,「外角の和は同じだろうか？」から「どちらが大きいか？」という選択タイプの「決定問題」で提示するように修正している。

・β（問題文）は，「どちらが大きいか？」に変更することで，直観的な予想がより生かさせるようにしている。視覚的に「問題」を捉えられることから，右のように，「五角形」,「同じ」と予想する生徒が多い傾向にある。



【問題４】：第３学年「２乗に比例する関数」

筆者はこれまでに第３学年を７年間指導している。推移型の問題例として取り上げる【問題４】は，$y=ax^2$では変化の割合が一定ではないことを，一次関数の式と比較しながら理解することをねらいとした授業である。また，この学習は２乗に比例する関数のグラフの特徴や変域について学習した次時に指導している。提示した「問題」は，意図的に一次関数と比較させるようにしており，関数の数値や変域などを工夫しながら「決定問題」のタイプで出題したものである。なお，これまで最も多く扱ってきた「問題」と主な授業の流れは，次の通りである。

> **【問題４】**
> 太郎君は，次の２つの式を見て「変化の割合はどちらも２である」と答えた。太郎君の考えは正しいだろうか？
> ①：$y=2x+3$　　②：$y=2x^2$

〈授業の流れ〉

①「太郎君」「変化の割合はどちらも２である」と板書し，①と②の式を書き加えていく。全体に「正しいだろうか？」と問いかけながら問題提示を行う。なお,「問題」はノートに書かせる。

②予想させると，「正しい」が３割程度，「正しくない」が７割程度となる。そこで，「どのように調べたらよいか？」ということを課題とする。

③「正しい」と考えた生徒の理由から取り上げて確認していく。

・①は変化の割合が一定で係数が２となり，②の係数も２になっている。

・xの値が０から１まで増加するときの変化の割合を求めると，どちらも２になるから。

④「正しくない」と考えた理由を取り上げ，別の範囲では，２にならない場合があることを確認する。

⑤$y=ax^2$では変化の割合が一定にはならない理由を，式や表を用いて一次関数と比較させながら考えさせる。

⑥２乗に比例する関数では変化の割合が一定ではないことをまとめ，教科書の練習を通じて求め方を定着させる。

この【問題４】における問題提示に関わる構成要素α・βの推移は，【表４】の通りである。

【表４：過去に提示した「問題」の構成要素】

実施年月日	α（式）	β（問題文）	タイプ
1998.10. 1	$y=3x^2$ $y=3x-2$	xが０から１ 変化の割合は？	求答
2003.11.20	$y=2x^2$ $y=2x-2$	変化の割合は２ 正しいか？	正誤
2006. 9.26	$y=2x^2$ $y=2x+3$	変化の割合は２ 正しいか？	正誤
2007.11. 6	$y=2x^2$ $y=2x+3$	変化の割合は２ 正しいか？	正誤
2010. 9. 1	$y=2x^2$ $y=2x-2$	変化の割合は２ 正しいか？	正誤
2013. 6.20	$y=2x^2$	変化の割合は２ ①②どちらか？	選択
2015.10.10	$y=2x^2$	変化の割合は２ ①②どちらか？	選択

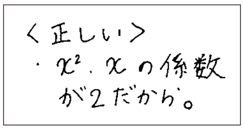
問題提示では，書き写す量が多くならないように，「変化の割合はどちらも２」「正しいだろうか？」など，要点を絞りながら板書している。

表４の結果から，【問題４】は幾度かの授業において，問題提示に関わる構成要素α・βに変更があることがわかる。つまり，「推移型の問題」であることが確認できる。なお，タイプの欄は「決定問題のタイプ」を示しており，２度の推移があることも特徴的である。特に，2013年と2015年の①と②の選択肢は次の通りであり，いずれも変化の割合が２となるように数値を設定している。

① xの値が０から１まで増加するとき
② xの値が $\frac{1}{4}$ から $\frac{3}{4}$ まで増加するとき

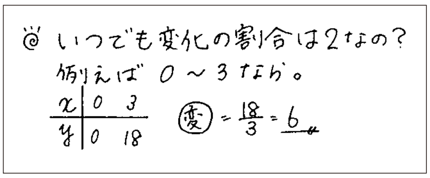
この表４と授業実践の結果から，次の４点を読み取ることができる。

・α（数値）は，$y=2x^2$と$y=2x+b$を扱うことが，生徒の予想を基にしながら変化の割合を比較したり，説明していく際にわかりやすいことが，これまでの実践から確認できている。$y=2x+b$の定数部分については，授業の後半で表をつくる際に$b=-2$の方が表しやすいことから，推移が見られている。

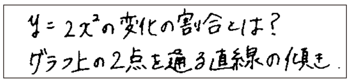


・α（式）は，2013年と2015年では$y=ax^2$のみを扱うことに推移している。一次関数は授業の後半で，比較材料として取り上げている。

・β（問題文）は，変化の割合を求めさせることから判断したり選択したりする問題文に推移している。特に，2003年から2010年の問題文は直観的な予想を促しやすく，課題が明確になることから，右のように変化の割合を調べる必要性が高まっている。



・β（問題文）は，求答→正誤→選択タイプに推移している。選択タイプの選択肢は意図的に数値を工夫したことで，整数以外の数や負の数などに着目しながら，変化の割合の意味に迫ることができるようになっている。



⑺　「推移型の問題」からの分析・考察

【問題３】と【問題４】を「推移型の問題」の具体例として取り上げた。ここで，この２つの「問題」には，なぜ推移が見られたのだろうか。「推移型の問題」となった根拠を，これまでの実践結果から，次のように分析・考察した。

［考察１］
・授業実践を積み重ねていくことで，本時のねらいの焦点化に向けた「問題づくり」が段階的に行われている。
［考察２］
・直観的に予想するだけではなく，予想した結果から，新たな疑問や課題が自然に生じるように改善されている。
［考察３］
・構成要素α（式・数値・図など）とβ（問題文）の両面から，「問題」を改善することができやすい指導場面である。

「問題」に推移がある根拠としては，本時のねらいに向けて，問題自体に改善の必要性があることがあげられる。つまり，前述した「よい問題」

の条件①〜③（学習意欲の喚起・指導内容の伝達・思考の重視）に不十分さがあると断言できる。例えば【問題４】では，変化の割合の意味を理解させるためには x の範囲に目を向けさせ，取り得る２点の座標によって傾きが変化することに気付かせる指導を行うべきであった。その結果として，2013年からの問題提示には推移が生じている。

次に，構成要素 α・β の両面からの修正が行われやすいという点があげられる。【問題３】では，与える多角形の角の数を幾度が変更している。これは，分度器で実測したり角の和を計算する中から，視覚的に予想したことと計算結果との違いに驚きを感じさせたいという教師の意図があるからである。

予想を取り入れることについては，相馬氏がその意義や効果を明らかにしている。(8) 単に計算をさせたり答えを問うだけの「問題」では，生徒の疑問が自然な形で課題に変容することは難しく，こうした「問題づくり」の段階を踏むことはできない。

このように「問題」に推移が生じているのは，教師の意図的な働きかけに基づいて，「問題」がアレンジされた結果である。さらに，問題提示の構成要素 α・β により，比較的容易に修正が行われていることも重要な視点だと言える。

４．「問題づくり」の視点の提案

⑴　実践研究から得た「問題」の推移に関する知見

「よい問題」を提示するためには，「問題の工夫」が必要であることを理論的に踏まえながら，これまで実践研究に取り組んできた。そして，「推移型の問題」と「非推移型の問題」の具体例を通じて，それぞれの根拠と教師の意図を分析・考察した。

本研究を通じて得ることができた知見から，「問題解決の授業」における「問題づくり」の視点を次のように３点にまとめ提案する。

ア．「推移型の問題」と「非推移型の問題」を把握しておくこと。
イ．「推移型の問題」を段階的に踏まえ，計画的に授業改善に取り組むこと。
ウ．構成要素 α（図・数値など）と β（問題文）の双方から「問題」を工夫していくこと。

アについては，教師の授業記録の方法にも関連が深い。毎回指導案を作成し，授業後の反省を記録し綴ることは難しいが，ある程度の実践結果を振り返る資料は，継続して蓄積したいものである。筆者は授業記録ノート（生徒のノートと同様な記録ノート）を作成し，それを振り返ることで「問題」の推移を見取ることが可能となった。「問題づくり」の視点としては，推移を捉える方法を工夫することも重要だと考える。

イについては，「推移型の問題」をどのように加筆・修正していくかが重要となる。「問題づくり」は，生徒の実態や領域・単元などの指導内容に即して，必要に応じて改善することが望まれる。全く新たな「問題」に切り替えることも効果の１つとも言えるが，実践研究の推移を見取るためには，計画的にそして長期的に加筆・修正を加えていくことが必要だと考える。

ウについては，「問題づくり」の基本は「決定問題」の構成要素 α と β に着目することである。まずは，数値や図を工夫することがその第一歩と言える。直観的な予想を促したり，解決方法に多様性が生じるのは，数値の修正による要因が大きいと考えられる。さらに，図の形や向きなどにも改善の視点がある。図を用いた「問題」は視覚的に捉えやすいことから，思考のきっかけを与える授業が展開できるからである。

⑵　「問題づくり」の視点の提案を踏まえた授業例

本稿の実践例は，主に関数や図形を扱っており，数と式領域での推移の状況が示されていない。そこで，第３学年の「２次方程式」の単元で，「問題づくり」の視点の提案を踏まえた授業が実践さ

れていることの確認を，視点ア～ウに沿って検証することにした。

本時は平方完成による２次方程式の解き方の必要性を知り，その解き方を理解することをねらいとしている。2003年での授業では，【問題５】を提示している。これまで最も多く扱ってきた「問題」と主な授業の流れは，次の通りである。

> **【問題５】**
> $x^2+8x+16=7$ を解くと？

〈授業の流れ〉

①最初に式だけを板書し，「解くとどうなるかな？」と問いかけながら「解くと？」と黒板に付け加えて問題提示を行う。なお，「問題」はノートに書かせる。

②少し考える時間を与えて，因数分解を利用して解こうとする生徒を見つけ出し，例として取り上げる。

③乗法公式に当てはめることができないことから，この方法では問題が解決できないことを全体で共有し，「他の方法で解くことはできないだろうか？」と課題を提示する。

④平方根の考えを利用している生徒を見つけ出し，板書させる。また，その解き方と解を確認し，２次方程式が解けることを全体で確認する。

⑤平方完成の形にする練習として，他の２次方程式を板書し，式を変形させる方法について理解を深めていく。

⑥２次方程式を解くためには，因数分解や平方根の考えを用いた方法，そして平方完成を用いた方法があることを確認する。最後に，教科書の練習を通じて解き方の定着を図る。

この「問題」とこれまでの授業実践を振り返りながら，「問題づくり」の視点ア～ウについて，具体的に考察する。

［アの視点による考察］

筆者はこれまでに，平方完成による２次方程式の解き方を学習する授業を６年間指導してきている。この【問題５】における問題提示に関わる構成要素 α・β の推移は，【表５】の通りである。

【表５：過去に提示した「問題」の構成要素】

実施年月日	α（式・数値）	β（問題文）
2003. 9. 3	$x^2+8x+16=7$	解くと？
2006. 8.18	$x^2+8x+16=7$	解くと？
2007. 9. 7	$x^2+8x+16=7$	解くと？
2010. 6.10	$x^2+8x+10=0$	解はない。正しいだろうか？
2013. 7.22	$x^2+8x+10=0$	解はない。正しいだろうか？
2015. 6.26	$x^2+6x=5$（以下略）	当てはまる数は？

【問題５】を提示してから３年間の授業では，推移が見られないが，2010年には α：数値の見直しと β：問題文の変更が行われている。また，2015年には，構成要素 α・β の双方から，問題提示に大きな変更があることからも，【問題５】は「推移がある問題」と判断できる。

［イの視点による考察］

2006年と2007年の実践では，平方完成に着目させるために，授業の後半には２つ目として次の「問題」を追加して提示している。

> $x^2+6x-1=0$ なら？
> $x^2+6x-1+\underline{9}=0+\underline{9}$ ← 両辺に加える
> ⇓

その理由は，最初の問題提示だけでは，両辺に数を操作して，因数分解の形に変形することの必要性に気付く生徒がほとんど見られなかったという反省からである。両辺に９を加えるという考え方は斬新であり，その結果として因数分解が利用できることに驚きを感じた生徒も少なくはない。しかし，本来ならば最初に提示する「問題」の中から，「解けるのか？」といった疑問や葛藤を抱かせることが必要だと感じた。

> 問題
> 太郎くん「解はない！」
> 正しいだろうか？
> $x^2+8x+10=0$

2010年の実践では，正誤タイプの「決定問題」に変更しており，左辺＝０の形で「問題」を意図的に提示している。実際の授業では，「解はない」という答え

に不思議な感覚を抱いた生徒が複数いた。この授業での筆者の意図は，右辺を０にすることで，数を操作することで解決ができるという必要感を高めようとしたと考えられる。しかし，直観的に予想させたものの，判断に困っていた生徒も多数いる結果となった。

2013年には,平方完成を導く際のヒントとして,右のように○,△,□を用いた表現で板書を残していることがわかる。

x^2+6x+ ◎ ←ほしい数は？
↑
$(x+$▲$)^2$の形にしたい。

記号を用いて表現することで，生徒の思考の流れがスムーズになり，当てはまる数値を見出そうとする雰囲気を高めることができた。これらの段階を踏まえると,計画的に「問題」が推移されていることが読み取れる。

［ウの視点による考察］

2015年には，右の「問題」を提示している。

〔問題〕 $x^2+6x=5$
x^2+6x+○$=5+$○
$(x+$△$)^2=$□
○と△と□に当てはまる数は？

まず構成要素αについては，直観的な予想を生かすことも意図しながら，○，△，□を用いた式を扱うことにした。これにより，生徒の予想を取り上げながら，その根拠に迫る授業を展開することが可能となった。また，構成要素βについては，求答タイプの「決定問題」に変更した。問題把握が容易な上に，数値を問うことで直観的に予想をすることも可能となり，意欲的に取り組む生徒が数多くいた。このように,「問題」の推移の内容を分析・考察すると，構成要素α・βの双方から「問題」が工夫されていることが確認できる。

５．研究のまとめ

本稿では,「問題解決の授業」における「問題」の推移に着目し，「推移型の問題」の意図とその推移の場面について，実践例を通じて研究を進めた。筆者のこれまでの授業実践を振り返ると,「推移型の問題」が数多くあることが明らかになった上に，その多くは本時の目標の達成に向けた「問題」の改善が主な理由であったことが確認できた。

本稿から得た知見を踏まえて，「問題づくり」の視点を３点提案した。授業例を基に「問題」が推移されている段階を分析・考察することで，問題提示に関わる２つの構成要素から「問題」を工夫することの必要性を確認した。

授業の良し悪しは，最初に提示する「問題」に大きく左右されると考える。今後も「問題」のあり方について授業実践を通じて検証し，本研究を生かしながら数学の授業改善について研究を続けたいと考える。

【引用文献・参考文献】

(1)　谷地元直樹．2007.『問題の工夫に焦点を当てた授業づくり』．日本数学教育学会誌．第89巻第３号．pp.24-29.

(2)　谷地元直樹．2014.『数学教育における「問題の工夫」の意義』．日本数学教育学会．秋期研究大会発表集録．pp.55-58.

(3)　谷地元直樹．2015.『数学教育における「問題の工夫」の意義（Ⅱ）』．日本数学教育学会．秋期研究大会発表集録．pp.101-104.

(4)　岡本光司/土屋史人．2014.『生徒の「問い」を軸とした数学授業』．明治図書.

(5)　田中義彦．1999.『生徒の主体的な学びを保証する学習指導の工夫』．第81回総会特集号．日本数学教育学会誌．p.290.

(6)　相馬一彦/佐藤保．2009.『新「問題解決の授業」に生きる「問題」集』．明治図書.

(7)　相馬一彦/早勢裕明．2011.『算数科「問題解決の授業」に生きる「問題」集』．明治図書.

(8)　相馬一彦．2013.『「予想」で変わる数学の授業』．明治図書.

（附属旭川中学校教諭）