北海道教育大学学術リポジトリ
Hokkaido University of Education Repository

数学のよさを実感する生徒の育成

メタデータ	言語: Japanese
	出版者: 北海道教育大学
	公開日: 2018-02-19
	キーワード:
	作成者: 赤本, 純基
	メールアドレス:
	所属:
URL	https://doi.org/10.32150/00006628

数学のよさを実感する生徒の育成

赤　本　純　基

北海道教育大学附属釧路中学校

Fostering Students to Realize the Goodness of Mathematics

AKAMOTO Junki

Kushiro Junior High School Attached to the Hokkaido University of Education

要　旨

本研究の目的は，数学のよさを実感する生徒の育成のために，中学校第３学年の平方根の単元の指導において，どのような発問が効果的なのか検討及び実践し，その有効性について確認することである。本研究では，平方根の単元の指導において，統合的・発展的な考え方を促す発問を意図的に位置付け実践した。実践の結果，「数学的な見方や考え方」「数学的な技能」の観点における目標効果や「授業の内容が難しい時でも，やりがいを見つけ学習している」，「課題を考えるために，今まで学習したことを生かしている」の動因効果の高まりについて，一定程度確認することができた。また，検証を終えて統合的・発展的な考え方を促す発問と発問前後の指導法のポイントをまとめることができた。

１．はじめに

国際的な数学の学力調査結果から，我が国の中学生における傾向は，「認知的学力」に比べ「情意的学力」が低いことが報告されている。特に情意面では，PISA2015から，数学を学ぶ楽しさや，学習する意義を実感している中学生の割合が国際比較で見て低い結果となっているなど，気がかりな点がいくつか見られた。

中央教育審議会の審議のまとめでは，かねてから課題とされてきた「情意的学力」の向上に向けて，「数学的な見方・考え方」を育むことが重要であるととらえており，次期学習指導要領では再整理する方向性を発表している（文部科学省，2016）。

４月に行った調査の結果から，本校生徒の実態も，認知的学力・情意的学力については全国的な中学生と同様の傾向である。特に，情意的学力については，「数学が楽しく，やりがいを感じているから」というような，内発的な学習動機となっている生徒の割合（29％）に対して，「入試で必要な科目だから」というような，いわゆる功利的な学習動機となっている生徒の割合が多い(35％)傾向がみられた。

２．研究の概要

⑴　研究の視点

時代や社会の要請と本校生徒の実態，学習指導要領における数学の教科目標を踏まえて，本教科では，「算数・数学にふさわしい創造的な活動を意欲的に行う姿」を目指している。これは，数学をつくり出すことに夢中になり，粘り強く考え続けようとする姿ともいえる。その姿の具現化を目指し,「数学のよさ」について着目した研究を行っている。本校数学科では,「数学のよさ」を「課題の解決過程で認めた数学の簡潔，明瞭，的確，統合といった価値，さらにはその美しさ」ととらえている。

中学校学習指導要領解説数学編では「『数学のよさ』を実感できるようにすることは，数学の学習に意欲的に取り組むことができるようにすることに本来のねらいがある」と記されている（文部科学省，2008，pp.21）。また，中島は「『よさの感得』は，感情的，情操的な面にまで訴え，高めておき，そうしないではいられない気持ちをもつようにすることをねらいとしている」（中島，2015，pp.96）と述べている。これらのことから，「数学のよさの実感」と「数学の学習に対する意欲」は密接に関連するととらえ，研究主題を「数学のよさを実感する生徒の育成」と設定した。

数学をつくり出すことによさを感ずる心情を育むためには，具体的にどのような手だてを講じればよいのか。中島は「算数・数学における創造活動は,『簡潔・明確，統合といったことにロマンを感ずる心情から〚課題〛をつかみ，そうしたロマンの実現のための探求的な行動である』」と述べており，その創造活動を進めていくためには，子どもに「統合といったことによる発展的考察」をさせていく必要があると主張している（中島，2015）。

日常の学習指導の中で，生徒にこうした統合的・発展的な視点をもたせることは難しい。したがって,初めは教師が,生徒が自分で必要を感じ，自らの課題として新しいことを考え出すように，適切な発問を通して，生徒に統合的・発展的な考え方を学ばせることが必要ではないかと考えた。そこで，次のような手だてを講じた授業を構築することとした。

意図的に統合的・発展的な考え方を促す発問を通して，課題を追究する授業を構築する

なお，統合的な考え方と発展的な考え方については，片桐の先行研究をもとに表１のようにとらえている（片桐，2004，pp.48-52)。

表１　「統合的な考え方」と「発展的な考え方」について

統合的な考え方	多くの事柄をばらばらにしておかないで，より広い観点から，それらの本質的な共通性を抽象し，それよって同じものとしてまとめていこうとする考え方。 ・高次の統合 より広い，より高い観点から見て一般的なものにまとめる。 ・包括的統合 幾つかの事柄を見直し，その中の１つに統合する。 ・拡張的な考え方 より広い範囲にまで言えるように，条件を少し変えて，新しいものを次々と取り入れてまとめる。
発展的な考え方	１つのことが得られてもさらによりよい方法を求めたり，これを基にしてより一般的なより新しいものを発見していこうとする考え方。次の２つの型（Ⅰ，Ⅱ）がある。 Ⅰ型　広い意味での問題の条件を変えてみる。 ・条件の一部をほかのものに置き換えてみる。条件をゆるめてみる。 ・問題場面を変えてみる。 Ⅱ型　思考の観点を変えてみる。

⑵　研究仮説

以上を踏まえ，本校数学科として研究仮説を次のように設定した。

集団解決の場面において，意図的に統合的・発展的な考え方を促す発問を通すことで，課題を追究する授業を構築することができ,「数学のよさ」を実感する生徒を育成できるであろう。

⑶　検証の計画

①目標効果（D1）の検証方法

プレテスト，ポストテスト

２群間における「数学的な見方や考え方」「数学的な技能」「数量や図形などについての知識・理解」を観点とした問題の正答率や回答人数，前後の伸びについて統計的検定を行い，その変化の要因を考察する。

②動因効果（D2）の検証方法

「学習意識調査」

単元指導前後に実施する。２群間における回答人数の変化について統計的検定を行い，動因の高まりの要因について考察する。

「観察・ノート」

生徒の授業中の反応などの様子やノートの記述をとらえ，その変化の要因を考察する。

３．実　践

⑴　実践の計画

①指導時期　平成28年５月中旬から６月下旬

②対象生徒

実験群　第３学年（95名）

統制群　第３学年(単元指導前の同一集団)(95名)

③指導単元　「２章　平方根」(教科書：東京書籍)

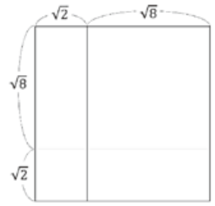
④単元目標

数の平方根の必要性や四則計算の仕方を理解し，数の平方根を数直線上に表したり，四則計算をしたりすることができるようにし，数の平方根を活用して考えたり判断したりしようとする態度を培う。

⑤単元指導計画（全16時間）

時数	主な学習活動・手だて
1	目標：平方根の意味について説明することができる。 問題　図（１cm間隔のドットペーパー）の中に次の条件をみたす正方形は何通りかけるだろうか。条件：正方形の面積は９ cm^2 以下，正方形は点を結んでかく。
2	目標：根号を使って表した数を，変換することができる。 問題　次の数の中で，５になる数はどれだろうか。 ㋐　$(\sqrt{5})^2$　㋑　$(-\sqrt{5})^2$　㋒　$\sqrt{25}$ ㋓　$-\sqrt{25}$　㋔　$\sqrt{(-5)^2}$
3	目標：平方根の大小を判断する方法を見いだすことができる。 問題　$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，２の中で，一番大きいのはどれだろうか。
4	目標：有理数と無理数の意味について説明することができる。 問題　次の数のうち，分数で表すことのできる数はどれだろうか。 ㋐　5　㋑　0.3　㋒　$\sqrt{4}$　㋓　$\sqrt{2}$ 手だて では，0.121212…は無理数なのだろうか。
5	問題演習
6	目標：平方根の計算で，$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$，$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$，$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$が成り立つことを説明することができる。
7	問題　縦が$\sqrt{2}$cm，横が$\sqrt{8}$cmの長方形の面積は，何cm^2だろうか。
8	目標：平方根を含む乗法の計算の仕方を，既習内容と関連付けて説明することができる。 問題　太郎さんは$\sqrt{18}\times(-\sqrt{12})$の計算を次のようにした。 $\sqrt{18}\times(-\sqrt{12})=-\sqrt{18\times12}$ $=-\sqrt{216}=-6\sqrt{6}$ 花子さんはこの計算方法を見て，太郎さんに対して「もっと簡単に計算する方法を思いついたよ！」と言っている。花子さんはどんな方法を思いついたのだろうか。
9	目標：数の平方根を含む除法の計算の仕方を既習内容と関連付けて説明することができる。 問題　面積が$\sqrt{54}$ cm^2の長方形をつくりたい。縦の長さが$\sqrt{12}$cmであるとき，横の長さは何cmにすればよいのだろうか。 手だて $\frac{3}{\sqrt{2}}$と$\frac{3\sqrt{2}}{2}$が等しいことを他の方法でも示せないだろうか。
10	目標：平方根の近似値を求めることができる。 分母に根号を含む式の分母を有理化することができる。 問題　２つの面積の正方形㋐，㋑がある。 ㋐　3 cm^2　㋑　300 cm^2 ㋐の正方形に対して，㋑は面積が100倍

	であるが，１辺の長さは100倍であるといえるだろうか。
11	目標：平方根を含む加法，減法の計算の仕方を，既習内容と関連付けて説明することができる。 問題　$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{(2+8)}$と計算してよいだろうか。 手だて このような正方形の図を使ったら，どんな説明ができるだろうか。
12	目標：数の平方根を含む式を，乗法公式を使って計算することができる。 問題　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$と$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$の計算結果は，どちらが大きいだろうか。 手だて $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$はどのように分母の有理化をすればよいのだろうか。
13	目標：目的に合わせて式を変形して，式の値を能率的に求めることができる。 問題　$x=\sqrt{3}+2$，$y=\sqrt{2}$のとき，x^2-y^2の式の値はいくらだろうか。 手だて $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$，$y=\sqrt{6}+\sqrt{2}$のとき， $4x^2-4xy+y^2$の式の値は何だろうか。
14	目標：A判の紙の２辺の長さがどのような関係になっているのか説明することができる。 問題　Ａ４判のコピー用紙の，短い辺と長い辺の長さの比は何だろうか。 手だて Ａ５判のコピー用紙の，短い辺と長い辺の長さの比は何だろうか。
15	問題演習
16	章の問題



⑵　実践の経過

①１つのことが得られてもさらによりよい方法を求めることを促す発問を位置づけた実践

第９時「平方根の除法」

発問

「$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$と$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$が等しいことを他の方法でも示せないだろうか。」

本発問は，導入の問題（「面積が$\sqrt{54}\text{cm}^2$の長方形をつくりたい。縦の長さが$\sqrt{12}$cmであるとき，横の長さは何cmにすればよいのだろうか」）の解決過程で，a，bを正の数とするとき$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$が成り立つことを確認した後，$\sqrt{54}\div\sqrt{12}$の計算結果を比べ，式を目的に応じて変形し，その性質を考えることを通して「分母の有理化」の考え方を生徒に気付かせることを目的にした発問である。

図１は授業の「まとめ」以降の概要である。

〔○：教師，■：生徒〕

まとめ
　a，bを正の数とするとき，平方根の除法について，次の式が成り立つ。

○　まとめたことを使って，$\sqrt{54}\div\sqrt{12}$の計算はできるかな？

■　$\sqrt{54}\div\sqrt{12}=\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\dfrac{54}{12}}=\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$になったよ。

■　僕は，$\sqrt{54}\div\sqrt{12}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$になった！

○　どちらかの計算方法は間違っているのかな？

■　いやいや，$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$と$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$は等しくなるはず。

○　だったら，$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$と$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$は本当に等しいのかな？説明してみよう。

～個人思考～

■　両方とも正の数だから，両方を２乗して比べたよ。

○　他の方法でも示せないかな？

■　$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$の分母と分子に$\sqrt{2}$をかけたら$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$になるよ！

○　え！どういうこと？詳しく説明してくれる？

■　だって，小学校のときに学習したように，分数の分母と分子に同じ数をかけても１をかけるのと一緒だから分母と分子に$\sqrt{2}$をかけてもいいでしょ。

■　おー！その手があったか！！

図１　第９時「平方根の除法」の「まとめ」以降の概要

「分母の有理化」が学習事項である授業は第10時であるが，事前の授業でその考え方のアイディアに触れさせることで，再度学習する際に問題の解決過程で得られた結果の意味を既習の知識と結びつけて統合され，生徒の学習効果が高まることも期待できると感じる。また，授業の自然な流れの中で「分母の有理化」を発見した感動は，数学

のおもしろさや楽しさを味わうことにもつながるのではないだろうか。図２はその時の生徒のノートと板書の様子である。

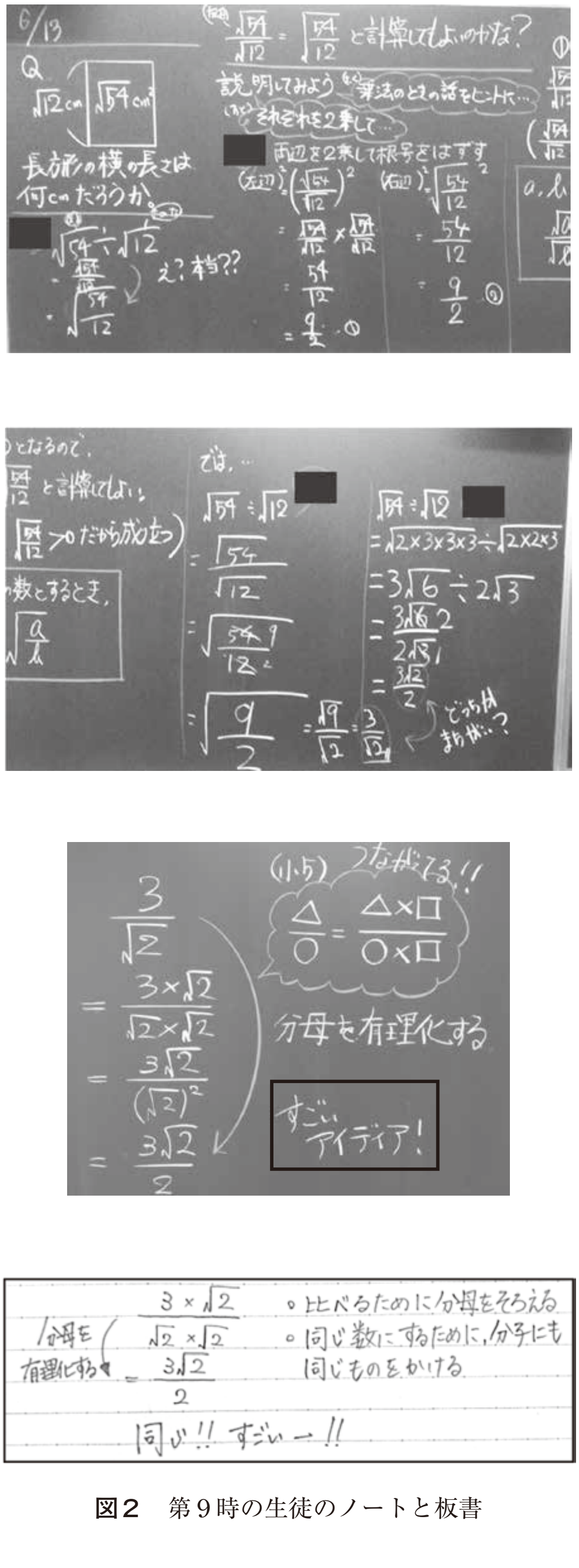


図２　第９時の生徒のノートと板書

②拡張的な統合のために思考の観点を変える発問を位置づけた実践

第11時「平方根の加減」

発問

「このような正方形の図を使ったら，どんな説明ができるだろうか。」

本発問は，導入の問題（「$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2+8}$と計算してよいだろうか）の解決過程で$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2+8}$と計算してはいけない理由を確認する中で，演算法則を図形的な意味で考えることを通して，$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$と計算してもよいことを生徒に気付かせることを目的にした発問である。

図３は授業の「集団解決」の概要である。

〔○：教師，■：生徒〕

「近似値を使って比べる方法」「両辺を２乗して比べる方法」「反例をあげて示す方法」が発表された後

○　このような正方形の図を使って考えている生徒がいるんだけど…，どんな考え方かわかるかな？
　　～正方形の図を生徒に板書させる～

■　面積の関係から，$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$になりそう！

○　え！どういうこと？

■　だって，正方形の中の４つの長方形の和は18でしょ。

■　あー，そうか！

○　だったら，どのように計算をすれば，$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$と計算できるのかな？

～個人思考～

■　$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$だから計算できるんだよ。

○　ん？よくわかんないよ。

■　だって，$3\sqrt{2}=\sqrt{18}$ですよね。

■　そういうことか！なるほどな！！

まとめ
　同じ数の平方根をふくんだ式は，同類項をまとめるのと同じようにして簡単にすることができる。

図３　第11時「平方根の加減」の「集団解決」の概要

意図的に指名して取り上げた生徒の説明を，適宜問い返したり，生徒の考えを板書したりしながら教室全体で数学的に練り上げていった。合理的な説明に高め合っていく中で，新しい計算方法を発見した感動が生まれた瞬間となった。図４はその時の生徒のノートと板書の様子である。

４．検　証

目標効果についてはテストの各観点における平

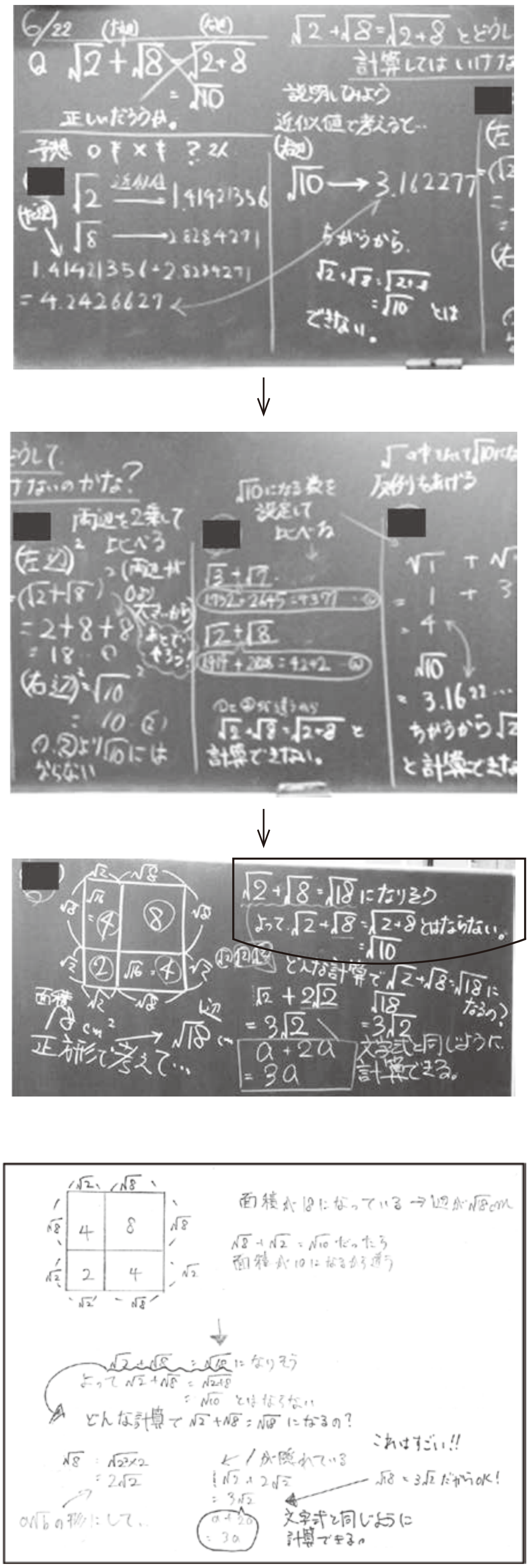


図４　第11時の生徒のノートと板書

均得点率については「ｔ検定」，テストの回答人数の比較には「カイ２乗検定」，動因効果についてはアンケートの回答人数を比較しているため「カイ２乗検定」を用いている。

⑴　目標効果（D1）の検証と考察

実験群は，単元指導後にポストテストの平均正答率がプレテストを上回った。特に，「数学的な見方や考え方」「数学的な技能」の観点で有意差が認められた（表２参照）。

表２　ポストテスト平均正答率の比較

	実験群平均正答率（標準偏差）	統制群平均正答率（標準偏差）	p値	t検定
「数学的な見方や考え方」	57.0%（23.1）	48.8%（21.0）	0.093	*
「数学的な技能」	83.9%（16.1）	76.1%（16.3）	0.029	**
「数量や図形などについての知識・理解」	90.1%（12.4）	86.3%（17.7）	0.101	ns

*** ＜ 0.01　** ＜ 0.05　* ＜ 0.1　ns＝有意差はない

さらに，「数学的な見方や考え方」を観点とした問題について，解答人数及び無回答人数について分析したところ以下の問題において，正答数には優位傾向は認められなかった（表３参照）が，回答数については，実験群に有意差が認められた（表４参照）。なお，この問題について授業では類似問題を取り扱っておらず，生徒にとっては，どちらの群についても初見の問題であった。

実験群では，明らかに無回答の生徒の人数が減った。その要因は，プレテストにおいて無回答だった生徒のポストテストでの回答の様子（図５）からも，授業の中で導入の問題を解決後も，生徒が自分で必要を感じ，自らの課題として新しいこ

プレテスト（統制群）の問題
　a＋b＝8　a－b＝2　のとき，abの値を求めなさい。ただし，求め方も記述すること。

ポストテスト（実験群）の問題
　a＋b=$\sqrt{14}$　a－b=$\sqrt{10}$のとき，abの値を求めなさい。ただし求め方も記述すること。

表３　テスト小問分析（正答数）

観察値

	○	×	計
統制群（プレ）	20	65	85
実験群（ポスト）	23	62	85

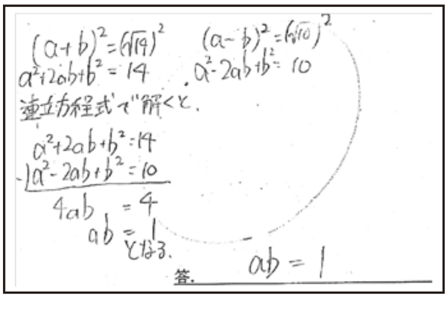
p値:p＝0.597
カイ２乗検定:p＞0.05

表４　テスト小問分析（回答数）

観察値

	有	無	計
統制群（プレ）	47	38	85
実験群（ポスト）	72	13	85

p値:p＝0.001
カイ２乗検定:p＜0.05



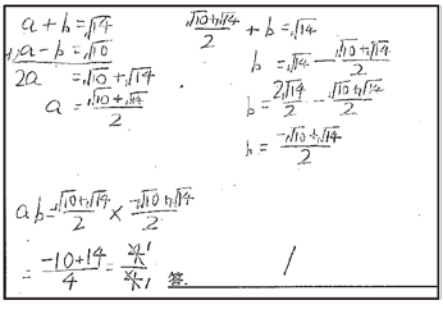


図５　プレテストにおいて無回答だった生徒のポストテストでの回答の様子

とを考え出すように，適切な発問を通して，生徒に統合的・発展的な考えさせる機会を増やすことができたからだと推察される。こうした教師の働きかけにより，考えることに夢中になり，途中まででも，粘り強く考えて問題に挑戦しようとする生徒が増えたと考えられる。

⑵　動因効果（D2）の検証と考察

本単元前後に「数学学習意識調査」を実施した。その結果，実験群において「授業の内容が難しい時でも，やりがいを見つけ学習している」の項目で有意差が認められた（表５参照）。また，「課題を考えるために，今まで学習したことを生かしている」の項目についても「よくあてはまる」と回答した生徒の割合が単元指導の前後で大きく増えたことは，本実践の成果といえる。

表５　研究実践前後における
「数学学習意識調査」の結果の比較（抜粋）

質問項目	授業の内容が難しい時でも，やりがいを見つけ学習している				
	はい ←→ いいえ				カイ２乗検定
	④	③	②	①	
指導前	41	39	9	0	***
指導後	58	30	2	0	
質問項目	課題を考えるために，今まで学習したことを生かしている				
	はい ←→ いいえ				カイ２乗検定
	④	③	②	①	
指導前	41	43	5	0	ns
指導後	54	32	4	0	

*** ＜ 0.01　** ＜ 0.05　* ＜ 0.1　ns＝有意差はない

調査前後で「授業の内容が難しい時でも，やりがいを見つけ学習している」という項目で変化した生徒に対し，その理由についてインタビューを行ったところ，「授業で，流れの中で難しい問題

に取り組むことが多くなったけれど，おもしろいと思ったから」，「わからない問題に出会うと頭が熱くなって悩むけれど，わかったときのすっきり感が好きだと感じているから」等の回答が得られた。また，「課題を考えるために，今まで学習したことを生かしている」という項目で変化した生徒からは，「授業の最後の難しい問題で，それまで学んだことを生かす場面が多いと感じたから」等の回答が得られた。これらのことから，集団解決の場面において，意図的に統合的・発展的な考え方を促す発問を通すことにより，課題を追究する授業を構築することが，「数学のよさ」を実感するきっかけをつくったと考えられる。

5．まとめと展望

本研究は，数学のよさを実感する生徒の育成のために，中学校第３学年の平方根の単元の指導において，どのような発問が効果的なのか模索及び実践した結果，「数学的な見方や考え方」「数学的な技能」の観点における目標効果や「授業の内容が難しい時でも，やりがいを見つけ学習している」，「課題を考えるために，今まで学習したことを生かしている」の動因効果の高まりについて，一定程度確認することができた。また，検証を終えて明らかになった統合的・発展的な考え方を促す発問と発問前後の指導法のポイントをまとめると図６の通りである。

【発問のポイント】
集団解決で出た考えを広げたり，深めたりするような課題が生まれるように仕掛ける
・適用範囲を広げる
・思考の観点を変えてみる
・条件を変える
・問題場面を変える
・共通性を見つけてまとめる
【発問前後の指導法のポイント】
課題解決の中で，新しいことをいかにも自分で考え出したかのように思わせる
・机間指導を行い，意図的に指名する
・考えを促す問い返しをする
・思考の流れがわかる板書にする

図６　集団解決の場面において統合的・発展的な考え方を促す発問と発問前後の指導法のポイント

しかし，中学校全単元におけるこうした授業の在り方については満足に実証成果を得られていない。今後も集団解決の場面において，意図的に統合的・発展的な考え方を促す発問を通すことで，課題を追究する授業を日常的に実践し，実証的に研究を推進していきたい。

【引用・参考文献】

・片桐　重男，2004，数学的な考え方の具体化と指導，明治図書，pp.48-52
・中島　健三，2015，復刻版　算数・数学教育と数学的な考え方，東洋館出版社，pp.96
・文部科学省，2008，中学校学習指導要領解説　数学編，教育出版，pp.21
・文部科学省，2016，次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめについて（報告），文部科学省HP

（北海道教育大学附属釧路中学校教諭）