北海道教育大学学術リポジトリ
Hokkaido University of Education Repository
国立大学法人 北海道教育大学
HOKKAIDO UNIVERSITY OF EDUCATION

Kharlamovによるいくつかの位相型の実４次曲面の存在証明

メタデータ	言語: Japanese
	出版者:
	公開日: 2018-02-19
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 齋藤, 幸子
	メールアドレス:
	所属:
URL	https://doi.org/10.32150/00006663

北海道教育大学紀要（自然科学編）第68巻　第２号　　平成30年２月
Journal of Hokkaido University of Education (Natural Sciences) Vol. 68. No.2　　February, 2018

Kharlamovによるいくつかの位相型の実４次曲面の存在証明

齋　藤　幸　子

北海道教育大学教育学部旭川校数学教育専攻

Kharlamov's Proof of the Existence of Real Quartic Surfaces of Some Topological Types

SAITO Sachiko

Department of Mathematics Education, Asahikawa Campus, Hokkaido University of Education

概　要

この小論では，1976年にV.M.Kharlamovによりなされたいくつか位相型の実４次曲面の存在証明の斬新なアイデアと巧妙な証明のアルゴリズムについて紹介する。これは，当時現れたばかりのK3曲面の変形族とその上の周期写像の理論を，反正則対合付きで用いるものであった。実４次曲面の存在性を示すために，具体的な実４次多項式を与えずに，実K3曲面（反正則対合を持つK3曲面）の２次元コホモロジー格子に関する判定条件を用いる（代数幾何的手法）という点でも画期的であった。この研究を端緒として，実４次曲面や実６次曲線の位相型やisotopy型の分類（ヒルベルト第16問題）に，K3曲面の理論が積極的に用いられるようになり，時を移さず1979年には，V.V.Nikulinがヒルベルトスキームと格子理論を用いて，偏極実K3曲面のモジュライ空間のすべての連結成分を，各次数ごとに決定し，実代数K3曲面の統一的分類に成功した。このような一連の実K3曲面の研究手法について，日本では知る人はあまり多くなく，また，世界的にも実K3曲面の研究がかつてほど盛んではない。本稿では，Kharlamovの証明のアルゴリズムの簡明な解説を試みる。

1　はじめに　～ヒルベルト第16問題，非特異実４次曲面の位相型～

1900 年の第 2 回国際数学者会議 (ICM) でヒルベルト (D. Hilbert) が提示した 23 個の未解決問題のうちの第 16 問題（の前半）は以下のとおりであった：

(1)　実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 上の非特異 6 次曲線の $\mathbb{R}P^2$ における isotopy 型を調べよ。

(2)　実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ における非特異 4 次曲面の位相型を調べよ。

複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ における 3 変数 $d\ (\geq 1)$ 次斉次多項式 F の零点集合 A は，F が非特異（すなわち，

F の臨界点があっても $(0,0,0)$ のみ）な場合には，種数 $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ のリーマン面（コンパクト連結複素 1 次元多様体）であるため，A の位相型は定義多項式 F の次数 d で決まる。ところが，F が実係数の場合に，$\mathbb{R}P^2$ における零点集合 $\mathbb{R}A$ を考えると，$\mathbb{R}A$ は空集合または $\mathbb{R}P^2$ の 1 次元コンパクト部分多様体となり，その各連結成分は S^1 に同相であるが，連結成分の個数は F の次数では決まらず，$\mathbb{R}A$ の $\mathbb{R}P^2$ における isotopy 型も決まらない。そこで，**(1)** のような問題が提出されたのである。

同様に，$\mathbb{C}P^3$ における 4 変数 d (≥ 1) 次斉次多項式 F の零点集合 X は，F が非特異（すなわち，F の臨界点があっても $(0,0,0,0)$ のみ）な場合，コンパクト連結複素 2 次元多様体である。F が実係数の場合に，$\mathbb{R}P^3$ における零点集合 $\mathbb{R}X$ は，空集合または $\mathbb{R}P^3$ の 2 次元コンパクト部分多様体であるが，一般には非連結で，様々な位相型，そして，$\mathbb{R}P^3$ における様々な isotopy 型のものが存在する。

さて，$\mathbb{C}P^2$ 上の非特異 d 次曲線 A の定義多項式が実係数だと仮定する。このことは，conj を $\mathbb{C}P^2$ 上の複素共役としたとき，$\mathrm{conj}(A) = A$ と同値である。すると，$\mathbb{R}A$ の連結成分の数に関して，次の不等式が知られている（Harnack の不等式）：

$$\mathbb{R}A \text{ の連結成分の数 } \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1 \tag{1.1}$$

$\mathbb{R}A$ の各連結成分（S^1 に同相）は，それを A から取り除いた補集合が連結であるならば，取り除いたときに種数が下がるように A に埋め込まれている。順に $\mathbb{R}A$ の各連結成分を取り除いていき，初めて非連結になったとき，それらは複素共役 conj で移りあう丁度 2 個の連結成分からなることになる。したがって，最早そこには実部の点が存在しない。このようにして，不等式 (1.1) が証明される。

$A \setminus \mathbb{R}A$ が非連結であるとき，A は **dividing 曲線**であると言う（図 1 参照）。

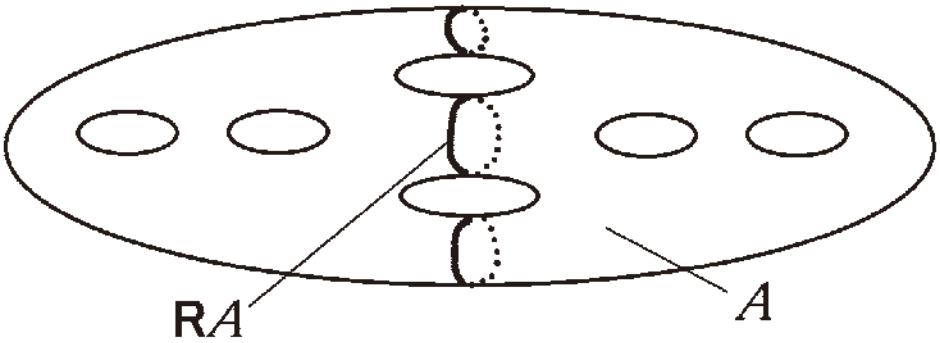

図 1: dividing 曲線

定義 1.1 $\mathbb{C}P^2$ 上の非特異実 d 次曲線 A に対し，$\mathbb{R}A$ の連結成分の数が最大値 $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$ に一致するとき，A は **M-曲線**であるという。

各次数 d に対し，その次数の M-曲線が存在することが知られている。上の考察から，M-曲線は dividing 曲線であることがわかる。しかし，例えば，図 1 では，A は種数 6 のリーマン面（複素曲線）であり，$A \setminus \mathbb{R}A$ が非連結となっているが，$\mathbb{R}A$ の連結成分数は 3 で，最大値の 7 ではない。

$d = 6$ の場合，A の種数は 10 なので，$\mathbb{R}A$ の連結成分の個数の最大値は 11 であるが，ヒルベルトの時代には，M-曲線 $\mathbb{R}A$（11 個の S^1 からなる）の $\mathbb{R}P^2$ における isotopy 型は不明であった。1970 年代になり，V. A. Rokhlin，V. I. Arnol'd らが，以下のような現代的視点でヒルベルト第 16 問題に取り組み始めた。

定義多項式が実係数だとし，対 (A, conj) を考えると，conj は複素多様体 A 上の反正則対合 (anti-holomorphic involution) であり，$\mathbb{R}A$ は conj の不動点集合 $\{x \in A \mid \mathrm{conj}(x) = x\}$（これを Fix conj

と記す）である。そこで，一般に，X を概複素多様体（これは実偶数次元），T を X 上の反正則対合とする。T の不動点集合 $\mathrm{Fix}\,T$ は，X の（向き付け可能とは限らない）部分多様体となり，その次元は X の実次元の $\frac{1}{2}$ である。（一般に，多様体上の smooth な $\mathbb{Z}_2$ 作用の不動点集合は部分多様体となるが，その次元は，各連結成分で異なることがある [2]。）

X がコンパクトだと仮定する。Smith 完全系列（Wilson[18] などを参照）を用いると，$\dim H_*(\mathrm{Fix}\,T;\mathbb{Z}_2) \leq \dim H_*(X;\mathbb{Z}_2)$ が成立し，両辺の差が偶数であることが知られている。そこで，

$$\dim H_*(\mathrm{Fix}\,T;\mathbb{Z}_2) = \dim H_*(X;\mathbb{Z}_2) - 2i$$

が成立するとき，対 (X,T) は $(M-i)$**-多様体**であると呼ぶ。$i=0$ のときは単に M-多様体と呼ぶ。簡単に確かめられるように，A が M-曲線であることと，対 (A,conj) が M-多様体であることは同値である。

そこで，$\mathbb{C}P^3$ の中の非特異実4次曲面 (X,conj) に対しても，$(M-i)$-多様体の概念が定義される。上述の V. A. Rokhlin の学生であった V. M. Kharlamov（以下，Kharlamov と記す）は，1972 年に，非特異実4次曲面の実部 $\mathbb{R}X$ の連結成分の数が 10 以下であることを証明した [8]。当時，次の位相型の非特異4次曲面の存在性は不明であった：

$$\Sigma_2 \cup 9S^2, \quad \Sigma_2 \cup 8S^2, \quad \Sigma_2 \cup 7S^2, \quad \Sigma_2 \cup 6S^2 \tag{1.2}$$

$$\Sigma_3 \cup 6S^2 \tag{1.3}$$

$$T^2 \cup T^2 \cup S^2 \tag{1.4}$$

ここで，$\Sigma_g \cup kS^2$ は種数 g の向き付け可能連結閉曲面と k 個の S^2 の互いに交わらない和集合を表す。

そして，1976 年，Kharlamov は，(1.2) と (1.3) の位相型の非特異実4次曲面の存在を証明したのである [9]。特に，実部の位相型が $\Sigma_2 \cup 9S^2$ である非特異実4次曲面は M-多様体である。

Kharlamov の存在証明の方法は，K3 曲面の複素構造の変形 (deformations) 族の中に求める位相型の非特異4次曲面を見出すというものであった。K3 曲面の複素構造の変形理論については，1960 年代後半，モスクワの Steklov 研究所の Shafarevich セミナーで，Galina Nikolaevna Tjurina (1938–1970) が研究を進めていた。Kharlamov は，Tjurina の結果を equivariant version (反正則対合付き版) にして用いたのである。

2　コンパクト複素曲面の基本的な性質

コンパクト複素曲面の基本的な性質を復習する。参考文献として [1] を用いる。

2.1　コンパクト複素曲面

一般に，X を n 次元コンパクト複素多様体とするとき，その上の連接層 (coherent sheaf) の i 次元コホモロジー群は複素有限次元であり，$i > n$ のときは 0 である。連接層に対して，その Euler 数が定義される。特に，X の構造層の Euler 数を $\chi(X) := \chi(X, O_X)$ と表す（位相幾何学における X の Euler 標数のことではない）。X 上の正則 i-形式の germs の層を Ω^i_X，X 上の正則関数の germs の層を Ω^0_X とし，$h^{p,q}(X) := h^q(\Omega^p_X)$ と定める。$q(X) := h^{0,1}(X)$ とおき，X の不正則数，$p_g(X) = h^{n,0}(X)$ とおき，X の幾何種数と呼ぶ。任意の n 次元連結コンパクト複素多様体上の (p,q) 型複素微分形式の層に対して，Dolbeault Cohomology $H^{p,q}(X)$ が定義され，$H^{p,q}(X)$ は $H^q(X,\Omega^p_X)$ と同型であることが知られているので，$\dim H^{p,q}(X) = h^{p,q}(X)$ である。

コンパクトケーラー多様体 X に対しては Hodge 分解が可能である。また，$H^{p,q}(X)$ は $H^{q,p}(X)$ の共

役である。したがって，$h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$ であり，$b_k(X) = \sum_{p+q=k} h^{p,q}(X)$ である。

定理 2.1 ([1],p.139, (2.7)Theorem) ケーラーとは限らないコンパクト複素曲面に対し，次が成り立つ:

(1) $2h^{1,0} \leq h^{0,1} + h^{1,0} \leq 2h^{0,1}$ $(= 2q(X))$

(2) $b_1(X) = h^{0,1} + h^{1,0}$

(3) $b_1(X)$ が偶数ならば，$h^{1,0} = h^{0,1}$

(4) $b_1(X)$ が奇数ならば，$h^{1,0} = h^{0,1} - 1$

定理 2.2 ([1],p.144, (3.1)Theorem) コンパクト複素曲面がケーラーであるための必要十分条件は，b_1 が偶数なることである。

2.2 K3 曲面

（複素）K3 曲面の定義としては，以下の定義を用いる：

定義 2.3 ([10], [1], [12]) 連結コンパクト複素曲面 X が K3 曲面であるとは，次の 2 条件を満たすことである。
(1) 標準直線束 K_X が自明（$\Longleftrightarrow$ X 上至る所消えない正則 2-形式が存在），
(2) 第 1Betti 数 $b_1(X)$ が 0。

注意 2.4 上の定義では，X のケーラー性は仮定しない。コンパクト複素曲面（ケーラーとは限らぬ）に対しては，定理 2.1 **(1)** より，$h^{1,0} \leq h^{0,1} = q(X)$ であり，定理 2.1 **(2)** より，$b_1(X) = h^{0,1} + h^{1,0}$ なので，$b_1(X) = 0$ と $q(X) = 0$ は同値である。小平 [10], p.758 では,「$q(X) = 0$ かつ $c_1(X) = 0$」であることを K3 曲面の定義としている。一般に，n 次元複素多様体に対し，$c_1(K_X) := c_1(\wedge^n T^*X)$（定義）であり，$c_1(\wedge^n T^*X) = c_1(T^*X) = -c_1(TX) = -c_1(X)$ であり，$q(X) = 0$ のときには，X 上の複素直線束 L の同型類は，その第 1Chern 類 $c_1(L)$ によって決まるので，K_X が自明であることと $c_1(X) = 0$ は同値である。したがって，小平の定義は，定義 2.3 と同値である。

注意 2.5 $b_1(X) := \operatorname{rank} H_1(X;\mathbb{Z})$ なので，上の定義の時点では，$H_1(X;\mathbb{Z}) = 0$ であることはわからず，まして，単連結であることはわからない。ところが，小平 [10] の結果により，すべての K3 曲面は複素構造の変形で移り合うことがわかり，したがって，微分同相である。特に，非特異 6 次曲線で分岐する $\mathbb{C}P^2$ の 2 重被覆が K3 曲面であり，これが単連結であることが容易に示せる（例えば，Wilson [18] 参照）ので，すべての K3 曲面が単連結であることがわかる。また，Y. T. Siu [16] は，すべての K3 曲面がケーラーであることを証明した。

K3 曲面のよく知られている例としては，$\mathbb{C}P^3$ の中の非特異 4 次曲面，非特異 6 次曲線で分岐する $\mathbb{C}P^2$ の 2 重被覆，非特異 $(4,4)$ 次曲線で分岐する $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ の 2 重被覆などが知られている。向井 [12], 金銅 [11] 等を参照。標準直線束に関する公式を用いると，非特異 d 次曲線で分岐する $\mathbb{C}P^2$ の 2 重被覆が K3 曲面であるためには $d = 6$ であることが，$\mathbb{C}P^3$ の中の非特異 d 次曲面が K3 曲面であるためには $d = 4$ であることが必要十分であることがわかる。

注意 2.6 Tjurina[17] では，K3 曲面の定義にケーラー性を仮定しているものの，任意の K3 曲面の変形族の中で，$\mathbb{C}P^3$ の中の非特異 4 次曲面が稠密であることを示し，$\mathbb{C}P^3$ の中の非特異 4 次曲面がすべて微分同相であることから，すべての K3 曲面が微分同相であることを証明している。他方，[1] の Chapt.VIII

では，Kummer 曲面の稠密性を用いてすべての K3 曲面が微分同相であることを証明している。

K3 曲面のいくつかの著しい性質について述べる。まず，K_X が自明なことから，注意 2.4 で述べたように，$0 = c_1(K_X)(= -c_1(X))$ より，$c_1(X) = 0$ である。b_1 が偶数なので，定理 2.2 より，K3 曲面はケーラーである。そして，単連結であった。さらに，$\chi(X) = \chi(X, O_X)$ とおくと（ここで，O_X は X の構造層），Serre 双対性より，$\chi(X) = h^0(O_X) - q(X) + h^2(O_X) = h^0(O_X) - q(X) + h^0(\Omega_X^2) = 1 - 0 + 1 = 2$.

ネーターの公式 ([1], p.26) より，$\chi(X) = \frac{1}{12}(c_1(X)^2 + c_2(X))$ となり，$2 = \frac{1}{12}c_2(X)$ となり，$c_2(X) = 24$ がわかる。$c_2(X) = c_2(TX) = \langle e(TX_{\mathbb{R}}), [X]\rangle = X$ の Euler 標数。ここで，$e(TX_{\mathbb{R}})$ は Euler 類である。以上より，K3 曲面 X の Euler 標数が 24 であることがわかった。

Thom-Hirzebruch の指数定理 ([1], p.22) より，X の符号数（指数）は，

$$\tau(X) = \frac{1}{3}(c_1(X) - 2c_2(X)) = \frac{1}{3}(-48) = -16$$

であることがわかる。K3 曲面の定義から $b_1(X) = 0$ であるが，[1], p.311, Proposition 3.3 の証明にあるように，$H_1(X;\mathbb{Z})$ がねじれを持たないことがわかるので，$H_1(X;\mathbb{Z}) = 0$ である。したがって，普遍係数定理より，$H^2(X;\mathbb{Z})$ はねじれを持たない。ポアンカレ双対定理より，$H_2(X;\mathbb{Z})$ と $H^2(X;\mathbb{Z})$ は同型なので，$H_2(X;\mathbb{Z})$ もねじれを持たない。$b_1(X) = 0$ から，普遍係数定理より，$H^1(X;\mathbb{Z}) = 0$。ポアンカレ双対定理より，$H_3(X;\mathbb{Z}) = 0$。$H_2(X;\mathbb{Z})$ がねじれを持たないので，普遍係数定理より，$H^3(X;\mathbb{Z}) = 0$ がわかる。

$H_4(X;\mathbb{Z})$ は基本ホモロジー類で生成され，$\mathbb{Z}$ に同型である。したがって，普遍係数定理より，$H^4(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ となり，ポアンカレ双対定理より，$H^0(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を得る。そして，X の Euler 標数が 24 であることから，$\operatorname{rank} H_2(X;\mathbb{Z}) = 22$ がわかる。

さて，第 2 Stiefel-Whitney 類 $w_2(X)$ は，$c_1(X)$ の mod 2 reduction であり，Wu の公式より，任意の $c \in H^2(X;\mathbb{Z}_2)$ に対し，$(w_2, c) \equiv (c, c) \bmod 2$ なので，いま，$c_1(X) = 0$ であることから，$H^2(X;\mathbb{Z})$ 上のカップ積は偶形式であることがわかる。また，$H^2(X;\mathbb{Z})$ 上のカップ積は，ポアンカレ双対性により，unimodular である。対角化したときの正の固有値の数を $b^+(X)$，負の固有値の数を $b^-(X)$ とすると，$b^+(X) + b^-(X) = b_2(X) = 22$，$b^+(X) - b^-(X) = \tau(X) = -16$ より，$b^+(X) = 3$, $b^-(X) = 19$ であることがわかる。したがって，任意の K3 曲面 X に対し，$H^2(X;\mathbb{Z})$ 上のカップ積形式の同型類（isometry class）はただ 1 つである（[1], Chapt. I, (2.8)Theorem）。このような整数上対称双 1 次形式（格子）を，**K3 格子 (K3 lattice)** という。以上の証明方法は，[1], p.310〜p.311 による。

X が K3 曲面，t が X 上の反正則対合のとき，(X, t) を**実 K3 曲面**と呼ぶ。実 K3 曲面 (X, t) の実部 $\operatorname{Fix} t$ は，体積形式を持つので，向き付け可能である。

3 Kharlamov による実 4 次曲面の存在証明

3.1 Gudkov による非特異実 6 次曲線の分類

D. A. Gudkov[4], [5], [6] は，実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 上の非特異 6 次 M-曲線（連結成分数が 11 であるもの）の $\mathbb{R}P^2$ における isotopy 型として

$$\frac{9}{1}1 \text{ 型}, \quad \frac{5}{1}1 \text{ 型}, \quad \frac{1}{1}9 \text{ 型}$$

の 3 種類（図 2 参照）が存在し，また，これらに限ることを示し，1970 年代の初めに非特異実 6 次曲線

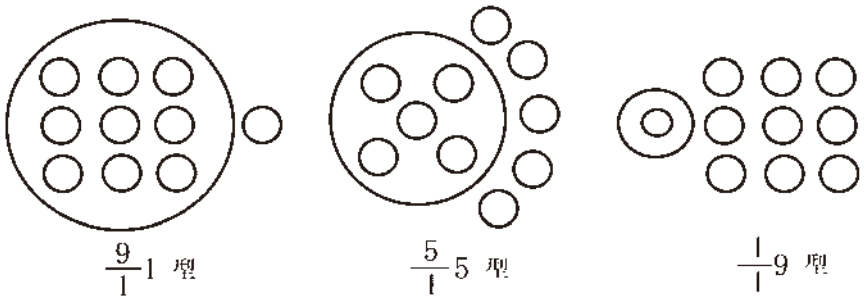

図 2: 実 6 次 M-曲線の isotopy 型

の isotopy 型の分類を完成した。

Kharlamov は，この $\frac{9}{1}1$ 型の非特異実 6 次曲線に注目したのである。この実 6 次曲線の複素零点集合（非特異複素曲線）A で分岐する $\mathbb{C}P^2$ の 2 重被覆を X とする。これは K3 曲面である。$\mathbb{C}P^2$ 上の複素共役 conj は，K3 曲面 X 上の 2 種類の反正則対合に持ち上げられる (それを T_1，T_2 とする) が，T_1 の不動点集合はこの曲線の定義多項式が 0 以下の値をとるような領域（$\subset \mathbb{R}P^2$）の 2 重被覆，T_2 の不動点集合はこの曲線の定義多項式が 0 以上の値をとるような領域（$\subset \mathbb{R}P^2$）の 2 重被覆となっているとする。この曲線の定義多項式がすべての $\mathbb{R}A$ の連結成分 (ovals) の外側で負の値をとるように選ぶと，T_1 の不動点集合の位相型は $\Sigma_2 \cup 9S^2$ である。したがって，1971 年の時点で，反正則対合を持つ K3 曲面（実 K3 曲面）(X, T_1) で，その不動点集合（”実部”）の位相型が $\Sigma_2 \cup 9S^2$ であるものの存在がわかっていたわけである。Kharlamov[9] は，この実 K3 曲面 (X, T_1) の複素構造の（反正則対合付き）変形 (deformations) 族の中に実 4 次曲面が存在することを示したわけである[1]。すると，その実 4 次曲面の実部の位相型は $\Sigma_2 \cup 9S^2$ にほかならない。

3.2 K3 曲面の周期

X を K3 曲面とする。$H^{2,0}(X)$ を X 上の正則 2-形式のコホモロジー類全体とすると，これは，複素次元 1 であり，de Rham 同型により，$H^2(X;\mathbb{C})$ の部分空間とみなせる。これを，K3 曲面 X の**周期**と呼ぶ。$H^2(X;\mathbb{Z})$ は階数 22 の自由 $\mathbb{Z}$ 加群である（前述）。これも，$H^2(X;\mathbb{C})$ の部分群とみなせる。

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}(X) &:= H^2(X;\mathbb{Z}) \cap (H^{2,0}(X))^{\perp} \\ &= H^2(X;\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X) \end{aligned}$$

とおく（X の Picard 群）。ここで，$\perp$ は，$H^2(X;\mathbb{C})$ 上のカップ積に関する直交補空間を表す。X が K3 曲面なので，Picard 群 $\mathrm{Pic}(X)$ は X 上の複素直線束の同型類全体とも，X 上の因子の線型同値類全体ともみなせる。

$H^2(X;\mathbb{C})$ の射影化を $P(X,\mathbb{C})$ とおく。$H^{2,0}(X)$ は $P(X,\mathbb{C})$ の元とみなせる。$H^2(X;\mathbb{C})$ 上のカップ積形式を Q で表し，

$$K := \{\lambda \in P(X,\mathbb{C}) \mid Q(\lambda,\lambda) = 0\}$$

とおくと，$H^{2,0}(X) \in K$ である。K は $P(X,\mathbb{C})$ の複素 20 次元部分多様体である。

1　前述のように，Kharlamov[9]が引用しているTjurinaの論文[17]では，K3曲面の定義においてケーラー性が仮定されていた。しかし，後年それを仮定しなくてもケーラー性が導かれることがわかったので，Kharlamovの論文における議論の一部が，現在では不要である。

3.3　複素多様体の複素構造の変形族

一般に，X を連結コンパクト複素多様体とするとき，X の**複素構造の変形族**（a family of deformations of the complex structure of X）とは，5 対 $(V, S, s_0, p : V \to S, j : X \to V)$ で，V, S は連結な複素多様体（S を**底空間**と呼ぶ）$s_0 \in S$，p は proper holomorphic submersion，j は正則埋め込み (holomorphic embedding) で $j(X) = p^{-1}(s_0)$ なるものを言う。このとき，各 $s \in S$ に対し，$p^{-1}(s)$ は，V のコンパクト複素多様体となっている。$V(s) := p^{-1}(s)$ とおく。各 $V(s)$ を**ファイバー**と呼ぶ。

定理 3.1 (倉西の定理, [3] 参照) $H^1(X; \mathbb{C}) = 0$ ならば，X の複素構造の普遍な変形族（universal family of deformations）が存在する。

ここでは，定理 3.1 の次の特別な形を用いる：

「X が Kähler で $H^1(X; \mathbb{C}) = 0$ ならば，X は Kähler かつ普遍な変形族を持つ。」

ここで，変形族が Kähler であるとは，各ファイバーが Kähler 構造を持ち，それがファイバーからファイバーへ連続的に変化することである。

3.4　K3 曲面の複素構造の変形族と周期写像

X が K3 曲面の場合，さらに，次の定理が成り立つ：

定理 3.2 (Tjurina[17]) (1)　X の任意の変形族 $d = (V, S, s_0, p, j)$ に対し，各ファイバー $V(s)$ $(s \in S)$ は K3 曲面である。

(2)　底空間 S が可縮ならば，各 $s(\in S)$ に対し，$j^* : H^*(V; \mathbb{Z}) \to H^*(X; \mathbb{Z})$，$(i_s)^* : H^*(V; \mathbb{Z}) \to H^*(V(s); \mathbb{Z})$ は同型写像である[2]。ここで，i_s は，$V(s)$ から V への包含写像。

j^*，$(i_s)^*$ を $\mathbb{C}$ 係数に拡張し，

$$\tau_d : S \to P(X, \mathbb{C})$$

を，$\tau_d(s) := j^*(((i_s)^*)^{-1}(H^{2,0}(V(s))))$ と定める。これを，**変形族 d に付随する周期写像** (the associated period map to d) と呼ぶ。$\tau_d(S) \subset K$ である。

(3) (K3 曲面に対する局所トレリ型定理)　さらに，変形族 d が Kähler かつ普遍ならば，τ_d は s_0 のある近傍 S' から $\tau_d(s_0)$ の K における近傍への複素解析的同型写像である。したがって，S' は複素 20 次元である。

補題 3.3 (K3 曲面に対する局所トレリ型定理の反正則対合付き版，[9], Lemma 1.3) X を K3 曲面，$t : X \to X$ を反正則対合とするとき，X の複素構造の Kähler な変形族 $d = (V, S, s_0, p : V \to S, j : X \to V)$ と反正則対合 $t_V : V \to V$，$t_S : S \to S$ が存在し，S は可縮で，周期写像 $\tau_d : S \to P(X, \mathbb{C})$ に対し，$\tau_d(S)$ は $\tau_d(s_0)$ の K における近傍であり，τ_d は S から $\tau_d(S)$ への複素解析的同型写像となっていて，$j \circ t = t_V \circ j$，$t_S \circ p = p \circ t_V$，$\tau_d \circ t_S = \overline{t^*} \circ \tau_d$ を満たす。

注意 3.4 (1)　補題 3.3 は，任意の実 K3 曲面 (X, t) に対し，その反正則対合もこめた変形族 (V, t_V) と，その底空間 (S, t_S) から実 K3 曲面 (X, t) の周期 $\tau_d(s_0)$ の K における近傍への同変 (equivariant) な複素解析的同型写像の存在を主張している。

2　Kharlamov[9]では$\mathbb{C}$係数で述べられているが，引用元のTjurina[17]では$\mathbb{Z}$係数でこの主張が成り立っている。このことは，あとでPic$(V(s))$を考えるときに重要である。

(2) $\mathrm{Fix}\, t_S$ の点 s に対しては，t_V は s 上のファイバー $V(s)$（K3 曲面）上に制限できるので，$V(s)$ 上の反正則対合となる。特に，$s_0 \in \mathrm{Fix}\, t_S$ である。

次に，変形族のファイバー（K3 曲面）たちの中に，実 4 次曲面を見出すために，実 4 次曲面であるためのひとつの十分条件を用意する。それが次に述べる補題 3.5 である。

実 K3 曲面 (X,t) に対し，反正則対合 t は X の向きを保つ対合なので，格子 $H^2(X;\mathbb{Z})$ 上で t^* は，カップ積を保つ準同型写像であるような対合である。これを単に「格子 $H^2(X;\mathbb{Z})$ 上の対合」と呼ぶ。対合付き格子 $(H^2(X;\mathbb{Z}), t^*)$ に対し，その部分格子 E_+，E_- を次のように定義する：

$$E_\pm := \{x \in H^2(X;\mathbb{Z}) \mid t^*(x) = \pm x\}.$$

補題 3.5 ([9], Lemma 2.2) 実 K3 曲面 (X,t) に対し，$\mathrm{rank}\,\mathrm{Pic}(X) = 1$，$\mathrm{Pic}(X) \subset E_-$ で，$\mathrm{Pic}(X)$ の生成元 h に対し $h^2 = 4$ だと仮定する。このとき，正則埋め込み (holomorphic embedding) $\varphi : X \to \mathbb{C}P^3$ が存在して $\varphi(X)$ は 4 次曲面であり，$\varphi^*(e) = h$，$\mathrm{conj} \circ \varphi = \varphi \circ t$ である。ここで，conj は $\mathbb{C}P^3$ 上の複素共役，e は $H^2(\mathbb{C}P^3;\mathbb{Z})$ の標準的生成元を表す。

U を，$\mathrm{rank}\, U = 2$，$\mathrm{sign}\, U = (1,1)$ であるような unimodular 偶格子 (the "**hyperbolic plane**") とする。

補題 3.6 ([9], Lemma 2.4) 実 K3 曲面 (X,t) に対して，その E_- に $U \oplus U$ を（双 1 次形式も込めて）埋め込めると仮定する。このとき，その埋め込みの像（$\subset E_-$）の中に，$\beta^2 = 4$ なる元 β を，$P(X,\mathbb{C})$ において $Q(\lambda,\beta) = 0$ で定義される超平面 $\beta^\perp$ が $\tau_d(s_0)$ に任意に近い点で K と横断的に交わるように取れる。したがって，そこで $\mathbb{R}(\beta^\perp)$ と $\tau_d(\mathrm{Fix}\, t_S)$ も横断的に交わり，その共通部分は実 19 次元である。

注意 3.7 $\tau_d(\mathrm{Fix}\, t_S) \cap \beta^\perp$ に属する周期は β と直交するので，その周期に対応する K3 曲面の Picard 群は $h^2 = 4$ なる元 h を持つことになる。

定理 3.8 ([9], Theorem 2.5) 実 K3 曲面 (X,t) に対し，E_- に $U \oplus U$ を（双 1 次形式も込めて）埋め込めると仮定する。このとき，ある $s \in \mathrm{Fix}\, t_S$ に対し，正則埋め込み $\varphi : V(s) \to \mathbb{C}P^3$ が存在し，$\varphi(X)$ は 4 次曲面であり，$\mathrm{conj} \circ \varphi = \varphi \circ t_s$ が成り立つ。

この定理の証明から，X と複素解析的に同型である $V(s_0)$ は実 4 次曲面ではないかも知れないが，s_0 に任意に近く，$V(s)$ が実 4 次曲面であるような s が存在するということがわかる。補題 3.3 は，Tjurina による K3 曲面に対する局所トレリ型定理 3.2 の反正則対合付き版 (real version) であり，補題 3.5 から定理 3.8 も，Tjurina が複素 4 次曲面に対して用いた論法の real version である。Kharlamov[9] において，Tjurina[17] の論法が本質的役割を果たしていることがわかる。

系 3.9 ([9], Corollary2.6) 実 K3 曲面 (X,t) に対し，E_- に $U \oplus U$ を（双 1 次形式も込めて）埋め込めると仮定する。このとき，(X,t) の実部 $\mathrm{Fix}\, t$ は，ある実 4 次曲面の実部に微分同相である。

さて，最終的に，実部の位相型が $\Sigma_2 \cup 9S^2$ であるような実 4 次曲面の存在は次のようにして示される：

まず，実 K3 曲面 (X,t) として，$\frac{9}{1}1$ 型の非特異実 6 次曲線で分岐する $\mathbb{C}P^2$ の 2 重被覆，そして，その上の反正則対合として実部の位相型が $\Sigma_2 \cup 9S^2$ であるほうをとる。すると,「一般化された Picard-Lefschetz の公式」([9], §3 参照）により，この実 K3 曲面 (X,t) に対しては，E_- が $U \oplus U$ と同型（isometric）であることがわかる。したがって，系 3.9 により，ある実 4 次曲面の実部の位相型が $\Sigma_2 \cup 9S^2$ であることになる。系 3.9 を用いて，ほかの（一連の）位相型の実 4 次曲面の存在性も同じ論法で証明できる。

ここで用いた「一般化された Picard-Lefschetz の公式」とは，実 6 次曲線の 1-パラメーター族 A_λ において，非特異実 6 次曲線 A_λ $(\lambda < 0)$ が（実ノードをいくつか持つ）特異実 6 次曲線 A_0 を経由して別の非特異実 6 次曲線 A_λ $(\lambda > 0)$ に変形するとき，そこで分岐する $\mathbb{C}P^2$ の 2 重被覆の 1-パラメーター族 X_λ

を考えたとき，$H^2(X_\lambda;\mathbb{Z})$ $(\lambda<0)$ から $H^2(X_\lambda;\mathbb{Z})$ $(\lambda>0)$ へ，E_- に関してどのような変化が起きるかを述べたものである。

その後の Kharlamov の研究や V. V. Nikulin[13] により，実 4 次曲面に関して，部分格子 E_- の同型類はすべて判明している。実 6 次曲線で分岐する 2 重被覆についてもそうである。

Nikulin[13] は，すべての偏極実 K3 曲面に対して，部分格子 E_+ および E_- の同型分類を完成させた (1979)。この論文は，I. I. Piateckii-Shapiro, I. R. Shafarevich [14] の定式化に基づき，ヒルベルトスキームとして実 K3 曲面全体を捉えている。そして，偏極実 K3 曲面の大域的なモジュライ空間の連結成分と，対合付き K3 格子の同型類との間の 1 対 1 対応を述べた重要な定理が，Nikulin[13] の定理 3.10.1 である。

注意 3.10 「一般化された Picard-Lefschetz の公式」は，Itenberg [7] や齋藤幸子 [15] における「non-increasing simplest degeneration」という 1-パラメーター族に対しても適用すると，新たな視点と結果が得られると予想される。

参考文献

[1] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces,* Springer, 2004.

[2] P. E. Conner and E. E. Floyd, *Differentiable Periodic maps,* Springer, 1964.

[3] A. Douady, *Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes,* Séminaire Bourbaki **9** (1964-66), 7–13.

[4] D. A. Gudkov and G. A. Utkin, *The topology of curves of the sixth-order and surfaces of the fourth-order,* Uchenye Zapiski Gor'k. Un-ta, **87** (1969), 3-213, English transl., Nine papers in Hilbert's 16th problem, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 112 (1978).

[5] D. A. Gudkov, *The construction of 6th order curve of type* $\frac{5}{1}5$, Izv. Vyssh. Zaved. Mat. **130**-3, (1973), 28–36.

[6] D. A. Gudkov, *The topology of real projective algebraic varieties,* Usp. Matem. Nauk, **29**-4, (1974), 3–79, English transl., Russian Math. Surveys, **29**-4, (1974), 1–79.

[7] I. Itenberg, *Curves of degree* 6 *with one non-degenerate double point and groups of monodromy of non-singular curves,* Real Algebraic Geometry, Proceedings, Rennes 1991, Lecture Notes in Math., **1524**, Springer, (1992), 267–288.

[8] V. M. Kharlamov, *The maximal number of components of a fourth degree surface in* $\mathbb{R}P^3$, Funct. Anal. Appl. **6** (1972), 345–346.

[9] V. M. Kharlamov, *The topological type of nonsingular surfaces in* $\mathbb{R}P^3$ *of degree four*, Funct. Anal. Appl. **10** (1976), 295–305.

[10] K. Kodaira, *On the structure of compact complex analytic surfaces I*, Amer. J. Math., **86** (1964), 751–758.

[11] 金銅誠之, 二次形式と $K3$ 曲面・Enriques 曲面, 数学 **42** 第 4 号 (1990), 346–360.

[12] 向井茂, K3 曲面上のベクトル束のモジュライとシンプレクティック多様体, 数学 **39** 第 3 号 (1987),

216–235.

[13] V. V. Nikulin, *Integral symmetric bilinear forms and some of their geometric applications,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser Mat. 43-1 (1979), 111–177, English transl., Math. USSR Izv., **14**-1 (1980), 103–167.

[14] I. I. Piateckii-Shapiro and I. R. Shafarevich, *A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3,* Math. USSR Izvestija, 5-3 (1971), 547–588.

[15] S. Saito, *On real anti-bicanonical curves with one double point on the* 4*-th real Hirzebruch surface,* Journal of Singularities **11** (2015), 1–32.

[16] Y. T. Siu, *Every K3 surface is Kähler*, Invent. Math. **73** (1983), 139–150.

[17] G. N. Tjurina, *The space of moduli of a complex surface with* $q = 0$ *and* $K = 0$ *(Chapt. IX)*, in "Algebraic Surfaces" by the members of the seminar of I.R. Shafarevich, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **75** (1965), translation with supplementary material by K. Kodaira and D.C. Spencer (AMS, 1967).

[18] G. Wilson, *Hilbert's sixteenth problem*, Topology, **17** (1978), 53–73.

（旭川校准教授）