比例の式y=axにおける乗法の数学的な意味に関する研究

北海道教育大学紀要（教育科学編）第69巻　第１号　平成30年８月
Journal of Hokkaido University of Education (Education) Vol. 69, No.1　August, 2018

比例の式$y=ax$における乗法の数学的な意味に関する研究※1

渡　会　陽　平

北海道教育大学札幌校数学教育学研究室

A study of the mathematical meaning of multiplication in the expression of proportion “$y=ax$”

WATARAI Yohei

Department of Mathematics Education, Sapporo Campus, Hokkaido University of Education

概　要

本稿の目的は，数学的に妥当性のある数量同士の関係としての比例の式の意味づけについて検討することである。そのために，先行研究における比例の式の見方をベクトル空間の数学によって特徴づけ，それらの数学的な意味に基づいて数量同士の関係としての比例の式の意味づけについて検討した。

その結果，先行研究における比例の式の見方により，比例の式における乗法の数学的な意味は，数同士の乗法，スカラー倍の乗法，線形写像の乗法というそれぞれ異なる意味として特徴づけられることを示した。また，比例の式をスカラー倍の乗法に基づいて意味づけた場合には比例の式の比例定数と一次関数の式の傾きの意味に不整合が生じるのに対して，比例の式を線形写像の乗法に基づいて意味づけた場合には比例の式の比例定数と一次関数の式の傾きをともに異種の２量の割合として捉えられる量として意味づけられるので，指導内容のつながりに不整合が生じないことを示した。

１．研究意図

数学では，２つの集合Ａ，Ｂについて，ある規則Γによって，Ａの各元aに対してそれぞれ１つずつＢの部分集合$\Gamma(a)$が定められるとき，その規則Γのことを“ＡからＢへの対応”という。そして，ＡからＢへの対応Γが「Ａの任意の元aに対して，$\Gamma(a)$はＢのただ１つの元から成る集合である。」という性質をもつとき，ＡからＢへの対応Γは“ＡからＢへの写像”とよばれる。さらに，実数全体の集合$\mathbb{R}$またはその部分集合から$\mathbb{R}$への写像は一般に“関数”とよばれている（松坂，1968）。このような数学における定義に基づけば，小学校算数科や中学校数学科において扱われる比例や反比例といった関数関係が伴って変わる２つの数量※2の数値の関係として式で表現されていることは妥当なことである。しかしながら，算数・数学教育において関数に関わる諸概念

の関連づけられた理解を実現するためには，関数関係を表す式を２つの数量の数値の関係として捉えるだけではなく，２つの数量同士の関係としても捉える必要があると考える。

例えば，平成28年度全国学力・学習状況調査の数学B③⑵では，「グラフの傾きを事象に即して解釈することができるかどうかをみる。」ことを目的として，x軸を車の使用年数，y軸を車を使用するときの総費用（この問題では，車両価格とガソリン代を合わせた費用）とする一次関数のグラフが提示され，そのグラフの傾きが何を表すのかを選択する問題が出題されている。この問題の調査結果では，正答である「１年間あたりのガソリン代」の反応率が30.1％にとどまった一方で，誤答である「総費用」の反応率は55.6％に及んでおり，半数以上の生徒がグラフの傾きを事象に即して適切に解釈できていないという実態が明らかにされている（文部科学省・国立教育政策研究所，2016)。この問題の正答を既習に基づいて導くならば，一次関数のグラフの傾きは一次関数の式$y=ax+b$におけるaに依存し，一次関数の式$y=ax+b$においてaは変化の割合，即ち（yの増加量）/（xの増加量）に等しいから，（車を使用するときの総費用の増加量）/（車の使用年数の増加量）によって求められるものがaの意味するものになる。この場合，車を使用するときの総費用の増加量には車両価格は関係せず，ガソリン代しか関係しないから，車を使用するときの総費用の増加量は車を使用するときのガソリン代の増加量と見なすことができる。よって，（車を使用するときのガソリン代の増加量）/（車の使用年数の増加量）によって求められるものを小学校算数科における単位量あたりの大きさの学習に基づいて解釈すれば，aは１年間あたりのガソリン代を意味するということを導くことができる。このように，上記のような解釈をするためには関数に関わる諸概念の関連づけられた理解が必要であり，その関連づけをするためには式で表された数量の関係を数量同士の関係として捉えて意味づけることが必要なのである。従って，従来の算数・数学教育で行われてきた関数関係を表す式を数値の関係として指導することに加えて数量同士の関係としても指導するためには，関数関係を表す式をどのように意味づけて指導したらよいのかについて検討しなければならない。

そこで，本稿では関数関係の基礎となる比例に焦点を当てて，その式$y=ax$の算数・数学教育における意味づけについて検討する。比例の式の意味づけについて，渡会（2015）は小学校算数科において児童が比例の式$y=ax$を対応の関係として意味づけられるようにするために，比例の式の指導に先立って単位変換の乗法・除法の指導を行うことにより比例の式を単位変換によって意味づける指導を提案している。また，比例の式の意味づけにまでは言及していないが，杉山（2010）は小学校算数科及び中学校数学科における比例の定義の違いの意義について述べる中で，比例の式$y=ax$は小学校算数科における比例の定義「２つの数量があり，一方の数量が２倍，３倍，…と変化するのに伴って，他方の数量も２倍，３倍，…と変化する。」から演繹的に導かれる，即ち比例の式は小学校算数科の比例の定義に基づくものであることを示している。一方で，宮下（2014）は数学における比例と小学校算数科の指導内容における比例を対照する中で，「量」の数学のもとで比例の式$y=ax$は量の対応から導かれる数値の対応であると述べている。このように比例の式に対する見方は研究の立場によって様々であり，渡会（2015）だけでなく杉山（2010）や宮下（2014）の立場からの意味づけも考えられる。従って，比例の式$y=ax$の意味づけの検討においては，それぞれの比例の式の見方の立場に基づいた意味づけを示した上で，それぞれの意味づけの教育的な価値を議論する必要がある。そのためには，まずそれぞれの立場が前提としている数学について整理した上で，それらの数学に基づいて数学的に妥当性のある意味づけを導く必要がある。

以上の問題意識より，本稿は先行研究における比例の式$y=ax$の見方の背景にある数学を整理することを通して，数学的に妥当性のある数量同士

の関係としての比例の式$y=ax$の意味づけについて検討することを目的とする。

２．研究方法

１．で述べた目的を達成するために，第一に，本稿では比例の式$y=ax$の意味づけに関わる先行研究として杉山(2010)，宮下(2014)，渡会(2015)を取り上げ，これらの先行研究における比例の式の見方の背景にある数学について整理をする。この３つの研究を取り上げた理由は，３．において後述するが，比例の式における乗法の数学的な意味がそれぞれで異なっているからである。そして，これらの先行研究ごとで異なっている比例の式における乗法の数学的な意味の違いについて説明するために，本稿ではそれぞれの先行研究における比例の式の見方をベクトル空間の数学によって特徴づける。ベクトル空間の数学によって特徴づける理由は，関数としての比例はベクトル空間の間の線形写像の特別な場合と見なすことができるから（川久保，1999），より一般的な場合であるベクトル空間の数学において比例の式を特徴づけることができ，それにより比例の式の構成要素の意味の区別が明確になることで，比例の式そのものの数学的な意味を明確にすることができるからである。

第二に，上記で特徴づけた３つの研究ごとでの比例の式の数学的な意味に基づいて数量同士の関係としての比例の式の意味づけについて検討し，その意味づけと関連する諸概念との数学的なつながりを観点として算数・数学教育においてその意味づけを扱うことの数学的な妥当性について議論する。

３．先行研究における比例の式の見方の背景にある数学についての整理

ベクトル空間の数学によって宮下（2014），杉山（2010），渡会（2015）らの示している比例の式の見方を特徴づけると，比例の式における乗法の数学的な意味をそれぞれ数同士の乗法，スカラー倍の乗法，線形写像の乗法として特定することができる。以下では，それぞれの先行研究における比例の式の見方の概要を説明してから，それぞれの比例の式の数学的な意味がベクトル空間の数学によってどのように特徴づけられるのかについて説明する。

⑴　数同士の乗法

①宮下（2014）における比例の式の見方の概要

宮下（2014）は「量」の数学をもとにして「比例」の数学を構成することで比例の式$y=ax$を導いている。まず，「量」の数学において，例えば「量」として「長さ」を考える場合には，１つの量カテゴリーとしての長さを意味する“長さ(系)”が（(長さ(集合)，＋)，×，(数(集合)，+，×)）で表されることを示している。上記の長さ(系）において，＋は量同士の加法，×は量に対する数の倍，+は数同士の加法，×は数同士の乗法を意味している。

次に，「比例」の数学において，比例関係f：量$_1$→量$_2$は式で$f(q\times n)=f(q)\times n$（$q\in$量$_1$，$n$：数）と表される。そして，量$_1$，量$_2$それぞれにおいて単位$u_1$，$u_2$を固定すると，量$_1$の任意の要素$q_1$は$q_1=u_1\times n_1$と表され，量$_2$の任意の要素も$u_2$の$n$倍の形で表される。よって，$f:q_1\mapsto q_2$ならば$f(q_1)=q_2$だから，$f(q_1)=f(u_1\times n_1)=f(u_1)\times n_1=u_2\times n_2$が成り立つ。従って，$f(u_1)=u_2\times(n_2/n_1)$となるから，$a=n_2/n_1$とすれば，$f$から数値の対応$\phi:n_1\mapsto n_1\times a$が導かれる。以上により，学校数学における比例の式$y=ax$はこの数値の対応$\phi$を意味することを示している。

②宮下（2014）における比例の式の見方についてのベクトル空間における数学的な意味

宮下（2014）は上述の内容がベクトル空間の数学に対応することを，次のように説明している。

１．「量」は，「線形空間」と対応。
２．「比例関係：量$_1$→量$_2$」は，「線形写像：線形空量$_1$→線形空間$_2$」と対応。
３．「単位u」は，「基底$\mathrm{U}=(u_1,\cdots,u_n)$」と対応。

4.「単位uに対する量qの（測定）値」は，「基底Uに対するベクトルvの座標」と対応。

5.「量$_1$の単位u_1，量$_2$の単位u_2に対し比例関係f：量$_1$→量$_2$から導かれる比例定数」は，「線形空間$_1$の基底U_1，線形空間$_2$の基底U_2に対し線形写像f：線形空間$_1$→線形空間$_2$から導かれる行列（「fの表現行列」）」と対応。

（宮下，2014）

宮下（2014）が述べている比例の式の導出についてベクトル空間の数学で表現すると，２量の比例関係は$\mathbb{R}$上のベクトル空間V_1→V_2における線形写像f：V_1→V_2として式で$f(\boldsymbol{v}\times n)=f(\boldsymbol{v})\times n$（$\boldsymbol{v}\in\mathrm{V}_1$，$n\in\mathbb{R}$）と表される。このように，本稿ではベクトル空間の要素を$\boldsymbol{v}$のように太字で表し，数は通常の書体で表す。そして，上式における×はベクトル空間における要素に対するスカラー倍を意味する。つまり，宮下（2014）が示している演算の表現とベクトル空間の数学における演算の表現の対応は，量についての演算**＋**と×はそれぞれベクトル空間における要素同士の加法+と要素に対するスカラー倍×に対応し，数同士の加法+と乗法×は体$\mathbb{R}$における加法と乗法に対応することになる。

そして，V_1とV_2それぞれにおいて基底$\boldsymbol{u_1}$，$\boldsymbol{u_2}$を固定すると，V_1の任意の要素$\boldsymbol{v_1}$は$\boldsymbol{v_1}=\boldsymbol{u_1}\times n_1$と表され，$\mathrm{V}_2$の任意の要素も$\boldsymbol{u_2}$の$n$倍の形で表される。$f:\boldsymbol{v_1}\mapsto\boldsymbol{v_2}$ならば$f(\boldsymbol{v_1})=\boldsymbol{v_2}$だから，$f(\boldsymbol{v_1})=f(\boldsymbol{u_1}\times n_1)=f(\boldsymbol{u_1})\times n_1=\boldsymbol{u_2}\times n_2$が成り立つ。従って，$f(\boldsymbol{u_1})=\boldsymbol{u_2}\times(n_2/n_1)$となるから，$a=n_2/n_1$とすれば，$f$から数値の対応$\phi:n_1\mapsto n_1\times a=n_2$（×は体$\mathbb{R}$における乗法）が導かれる。

以上のように宮下（2014）における比例の式$y=ax$とは，V_1とV_2それぞれにおいて基底を定めたときに線形写像f：V_1→V_2から導かれる数値の対応$\phi(x)=x\times a$を意味している。そして，この式における乗法は体$\mathbb{R}$における数同士の乗法である。

⑵ スカラー倍の乗法

①杉山（2010）における比例の式の見方の概要

杉山（2010）は小学校算数科における比例の定義「２つの数量があり，一方の数量が２倍，３倍，…と変化するのに伴って，他方の数量も２倍，３倍，…と変化する。」を$f(mx)=mf(x)$（但し，mは自然数）と関数記号を用いて表し，それをもとにして$f((1/m)\cdot x)=(1/m)\cdot f(x)$（$m$は自然数），$f((n/m)\cdot x)=(n/m)\cdot f(x)$（$m, n$は自然数），$f(mx)=mf(x)$（$m$は正の実数）が成り立つことを示すことで，小学校算数科において指導される比例の意味である「一方の数量が1/2倍，1/3倍，…と変化するのに伴って，他方の数量も1/2倍，1/3倍，…と変化する。」と「２つの数量の一方がm倍になれば，それに対応する他方の数量もm倍になる。」（文部科学省，2008）が導かれることを示している。

そして，$f(mx)=mf(x)$はmが０及び負の数の場合にも成り立つことを示すことで，$f(mx)=mf(x)$は全ての実数mについて成り立つことを示している。さらに，$x=1\cdot x$と見ることで，$f(x)=f(1\cdot x)=xf(1)=f(1)\cdot x$となるから，$f(1)$を$a$とすることで比例の式$f(x)=ax$が導かれることを示している。

②杉山（2010）における比例の式の見方についてのベクトル空間における数学的な意味

杉山（2010）が小学校算数科の比例の定義に対して用いている式表現$f(mx)=mf(x)$は，ベクトル空間の数学では線形写像の定義の１つである「$\mathbb{R}$上のベクトル空間V_1，V_2について，写像f：V_1→V_2が$f(\boldsymbol{v}\times n)=f(\boldsymbol{v})\times n$（$\boldsymbol{v}\in\mathrm{V}_1$，$n\in\mathbb{R}$）を満たす。」においてスカラーの数値の範囲を制限したもの，即ち「$\mathbb{R}$上のベクトル空間V_1，V_2について，写像f：V_1→V_2が$f(\boldsymbol{v}\times n)=f(\boldsymbol{v})\times n$（$\boldsymbol{v}\in\mathrm{V}_1$，$n\in\mathbb{N}$）を満たす。」…⒜と見ることができる。以下では，この関係を出発点として，杉山（2010）に倣い$f(\boldsymbol{v}\times n)=f(\boldsymbol{v})\times n$が任意の実数$n$について成り立つことを示すことを通して比例の式を導く過程を示す。

<u>（i）$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$</u>

⒜において$\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$のとき，$f(\mathbf{0}\times n)=f(\mathbf{0})\times n$だから$f(\mathbf{0})=f(\mathbf{0})\times n$。よって，$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$である。

(ii)比例の定義は０倍についても成り立つ

(a)の左辺において$n=0$のとき$f(\boldsymbol{v}\times 0)=f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$。また(a)の右辺において$n=0$のとき$f(\boldsymbol{v})\times 0=\boldsymbol{0}$。よって，$f(\boldsymbol{v}\times 0)=f(\boldsymbol{v})\times 0$が成り立つ。

(iii)比例の定義は$(1/n)$倍についても成り立つ

$\forall n\in\mathbb{N}$について，$f(\boldsymbol{v}\times(1/n)\times n)=f(\boldsymbol{v}\times(1/n))\times n$だから$f(\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{v}\times(1/n))\times n$。よって，$f(\boldsymbol{v})\times(1/n)=f(\boldsymbol{v}\times(1/n))$が成り立つ。

(iv)比例の定義は(m/n)倍についても成り立つ

$\forall n\in\mathbb{N}$，$\forall m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$について，$f(\boldsymbol{v}\times(m/n)\times n)=f(\boldsymbol{v}\times(m/n))\times n$だから$f(\boldsymbol{v}\times m)=f(\boldsymbol{v}\times(m/n))\times n$。よって，$f(\boldsymbol{v})\times m=f(\boldsymbol{v}\times(m/n))\times n$だから$f(\boldsymbol{v})\times(m/n)=f(\boldsymbol{v}\times(m/n))$が成り立つ。

(v)比例の定義は正の実数倍についても成り立つ

$\forall\lambda\in\mathbb{R}^+$について$\lim_{i\to\infty}q_i=\lambda$となる有理数列$\{q_i\}$が存在する。よって，$f$が連続関数とすると，$f(\boldsymbol{v}\times\lambda)=f\left(\lim_{i\to\infty}(\boldsymbol{v}\times q_i)\right)=\lim_{i\to\infty}f(\boldsymbol{v}\times q_i)=\lim_{i\to\infty}(f(\boldsymbol{v})\times q_i)=f(\boldsymbol{v})\times\lambda$が成り立つ。

(vi)線形写像の加法性

$f(\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2})=f(\boldsymbol{1}\times(v_1+v_2))=f(\boldsymbol{1})\times(v_1+v_2)=f(\boldsymbol{1})\times v_1+f(\boldsymbol{1})\times v_2=f(\boldsymbol{1}\times v_1)+f(\boldsymbol{1}\times v_2)=f(\boldsymbol{v_1})+f(\boldsymbol{v_2})$が成り立つ。

(vii)比例の定義は負数倍についても成り立つ

$\forall\lambda\in\mathbb{R}^+$について，$f(\boldsymbol{0})=f(\boldsymbol{v}\times\lambda-\boldsymbol{v}\times\lambda)=f(\boldsymbol{v}\times\lambda+(\boldsymbol{v}\times(-\lambda)))=f(\boldsymbol{v}\times\lambda)+f(\boldsymbol{v}\times(-\lambda))=f(\boldsymbol{v})\times\lambda+f(\boldsymbol{v}\times(-\lambda))=\boldsymbol{0}$。よって，$f(\boldsymbol{v}\times(-\lambda))=-f(\boldsymbol{v})\times\lambda=f(\boldsymbol{v})\times(-\lambda)$が成り立つ。

以上により，(a)は任意の実数nについて成り立つことが示された。また，もう１つの線形写像の定義である「$\mathbb{R}$上のベクトル空間V_1，V_2について，写像$f:\mathrm{V}_1\to\mathrm{V}_2$が$f(\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2})=f(\boldsymbol{v_1})+f(\boldsymbol{v_2})$（$\boldsymbol{v_1}$，$\boldsymbol{v_2}\in\mathrm{V}_1$）を満たす。」が(vi)により成り立つことが示されているから，fは線形写像である。

(viii)商一定

$f(\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{1}\times v)=f(\boldsymbol{1})\times v$ …(b)。よって，$f(\boldsymbol{v})/v=f(\boldsymbol{1})$である。

(ix)比例の式

上式(b)において$f(\boldsymbol{1})=\boldsymbol{a}$とすれば，$f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{a}\times v$である。

以上から，杉山（2010）における比例の式$y=ax$とは，線形写像$f:\mathrm{V}_1\to\mathrm{V}_2$による要素の対応関係を意味していて，その対応関係において求められるV_2の要素はV_2の要素$\boldsymbol{a}=f(\boldsymbol{1})$をスカラー倍した大きさとして求められる。即ち，比例の式における乗法は，要素のスカラー倍を意味している。

(3)　線形写像の乗法

①渡会（2015）における比例の式の見方の概要

渡会（2015）はVergnaudの概念野理論を分析枠組みとして，比例の式$y=ax$を図１で示されるような２つの測度空間M_1とM_2の間の変化の関係としてではなく，図２で示されるような対応の関係として意味づけることを検討している。

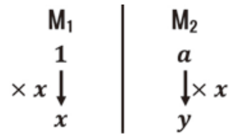

図１：変化の関係

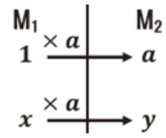

図２：対応の関係

その検討においては，図２における操作と，「1.7kmは何mか。」という単位変換の問題場面において「1.7×1000=1700だから1700mである。」と解決した場合の操作の構造が同じであることに着目して，予め同じ種類の数量の単位変換の乗法・除法を指導しておくことで，比例の問題場面における対応の関係を異種の２量の問題場面における単位変換として解釈することができ，それにより比例の式を単位変換の乗法・除法によって意味づけすることを提案している。

②渡会（2015）における比例の式の見方についてのベクトル空間における数学的な意味

渡会（2015）が分析枠組みとしているVergnaudの概念野理論（Vergnaud，1983）において，図１と図２の操作は比例関係にある２つの測度空間M_1とM_2における乗法の操作として説明されている。図１における乗法は，yが未知数の場合にM_1において１をxに対応させるスカラー演算子「$\times x$」をM_2のaに適用することによりyを求める乗法$a\times x$である。一方で，図２における乗法は，上行において１をaに対応させる関数演算子「$\times a$」を下行のxに適用することによりyを求め

る乗法$x \times a$である。

Vergnaudの理論において用いられている測度空間，スカラー演算子，関数演算子といった用語は，Vergnaud（1983）が「測度空間，スカラー演算子，関数演算子の間の区別はベクトル空間の理論に直接結びついている。」と述べているように，ベクトル空間の数学における概念と対応する。即ち，Vergnaud（1983）によると，測度空間はベクトル空間，スカラー演算子は線型結合，関数演算子は線形写像に対応する。

測度空間がベクトル空間，スカラー演算子が線型結合に対応するとはどういうことだろうか。Vergnaud（1983）はスカラー演算子について，「それは同種の２つの大きさの比であり，次元を持たない。」と説明しているから，それはベクトル空間の数学においてはベクトル空間における演算である要素に対するスカラー倍を意味する。よって，「測度空間Mにおける２つの測定数x_1，x_2について，x_1にスカラー演算子「$\times m$」を適用するとx_2になる。即ち$x_1 \times m = x_2$になる。」ということが，「ベクトル空間Ｖにおける２つの要素$\boldsymbol{v_1}$，$\boldsymbol{v_2}$について，$\boldsymbol{v_1} \times m = \boldsymbol{v_2}$（$m \in \mathbb{R}$）という線型結合の関係がある。」ということに対応するということである。従って，図１のVergnaudの理論におけるスカラー演算子の乗法の適用の操作は，fについて$\boldsymbol{a} \in \mathrm{V}_2$は$\boldsymbol{1} \in \mathrm{V}_1$に対応する要素だから$\boldsymbol{a} = f(\boldsymbol{1})$と表されるので，「線形写像$f$：$\mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$について，$f(\boldsymbol{1} \times x) = f(\boldsymbol{1}) \times x$が成り立つ。」という線形写像のスカラー倍が保たれる性質として説明できる。

一方で，関数演算子が線形写像に対応するとはどういうことだろうか。Vergnaudの理論におけるスカラー演算子がベクトル空間の数学における要素に対するスカラー倍に対応するということは，両方ともが「数を作用させて何倍かの大きさを求める」というそれぞれの空間における演算であることから容易に判断できた。しかしながら，関数演算子が測度空間における演算であるのに対して，線形写像は２つのベクトル空間の間の対応の規則であって演算そのものではないので，その対応は明らかではない。Vergnaud（1983）は関数演算子について，「それはM_1からM_2への線形関数の係数を表している。その次元は２つの異なる次元の商である（例えば，セント/ケーキの個数，kg/ha)。」と述べているが，この説明だけではベクトル空間の数学とのつながりが明らかではないので，本稿ではまず関数演算子がベクトル空間の数学における線形写像にどのようにして対応しているのかについて検討する。

第一の可能性として，演算を写像と見なすことによる対応が考えられる。松坂（1976）は「一般に，Ｓを任意の集合とするとき，S×SからＳへの写像はしばしばＳにおける二項算法（あるいは二項演算）とよばれる。」と述べ，「$\mathbb{R}$における乗法は（a，b）$\mapsto ab$によって定義される$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への写像である。」と例を挙げている。よって，同様に，例えばVergnaudの理論におけるスカラー演算子の乗法×を写像と見なせば「乗法×：$\mathrm{M}_1 \times \mathbb{R} \to \mathrm{M}_1$」というように表せる。従って，関数演算子の乗法×を写像と見なすと，「乗法×：$\mathrm{M}_1 \times \mathrm{F} \to \mathrm{M}_2$（Ｆは$\mathrm{M}_1$と$\mathrm{M}_2$の次元の商を次元とする要素の集合で，$\mathrm{M}_1 \times \mathrm{F}$は$\mathrm{M}_1$とＦの直積集合である)」と表せる。しかしながら，ベクトル空間の数学においては「写像f：$\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2 \to \mathrm{V}_3$」という形式の写像に特別な意味があるわけではないから，このように表したからといって関数演算子をベクトル空間の数学ならではの内容で説明することにはつながらない。

第二の可能性としては，線形写像を行列によって書き表すことによる対応が考えられる。線形写像の行列表現について川久保(1999)を引用する。

> Ｖ，Ｗをベクトル空間，$\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{w_1}, \cdots, \boldsymbol{w_m}$をそれぞれＶ，Ｗの基底とし，固定する。ここで，$n = \dim \mathrm{V}$，$m = \dim \mathrm{W}$である。そのとき，線形写像$f$：Ｖ→Ｗに対して，$f(\boldsymbol{v_j}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \boldsymbol{w_i} (j = 1, \cdots, n)$によって，$m \times n$行列$A = (a_{ij})$が定まる。この関係は一括して，$(f(\boldsymbol{v_1}), \cdots, f(\boldsymbol{v_n})) = (\boldsymbol{w_1}, \cdots, \boldsymbol{w_m})A$と表される。そして，Ｖの任意のベクトル$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v_j}$に対して，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$

は $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{w_1},\cdots,\boldsymbol{w_m})A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ と表される。従って $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の成分ベクトルの間には $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ という関係が成り立つ。

（川久保，1999）

このように一般のベクトル空間において線形写像は行列を用いて表される。Vergnaudの理論における関数演算子の乗法は$f(x)=x\times a=ax$と表せるから，ベクトル空間の数学においては，上記の最後の式表現に対応しているように見える。しかしながら，それは$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の成分ベクトルの間の関係であって，線形写像fによる$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の間の関係を表しているのではない。即ち，上記の最後の式表現はVergnaudの理論における２つの測度空間の間の要素の関係を表す関数演算子の乗法に対応するものではない。

上述のように，一般のベクトル空間における線形写像の行列表現ではVergnaudの理論における関数演算子に対応するものは見い出せなかった。しかしながら，一般のベクトル空間の場合には基底を定めるという過程があるためベクトル空間の要素の成分ベクトルが基底の変更に応じて変化するのに対して，Vergnaud（1983）が「測定数はベクトルとして働く。」と述べているように，Vergnaudの理論において測度空間の要素は最初から数値化された測定数であり，単位の変更による数値の変化は想定されていない。従って，Vergnaudの理論における測度空間は測定数を要素とする数ベクトル空間と見ることができる。そこで，数ベクトル空間における線形写像の行列表現を川久保（1999）から引用する。

$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{R}^m$の標準基底をそれぞれ$\boldsymbol{e_1},\cdots,\boldsymbol{e_n},\boldsymbol{e_1}',\cdots,\boldsymbol{e_m}'$とする。任意の線形写像$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$に対して$f(\boldsymbol{e_j})=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\boldsymbol{e_i}'$（$1\leqq j\leqq i$）によって$m\times n$行列$A=(a_{ij})$が定まり，$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$が任意の$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$に対して成り立つ。　（川久保，1999）

このように数ベクトル空間における線形写像の行列表現では，一般のベクトル空間における線形写像の行列表現とは異なり，２つのベクトル空間の間の要素の関係が行列を用いて表される。この式表現$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$がVergnaudの理論における関数演算子の乗法$f(x)=x\times a=ax$に対応するとすると，関数演算子は$\mathrm{M}_1$と$\mathrm{M}_2$のそれぞれの普遍単位によって定まる線形写像$f:\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2$の表現行列ということになる。さらに，Vergnaud（1983）は「測定数は１次元のベクトルである。」と述べているから，$\dim\mathrm{M}_1=\dim\mathrm{M}_2=1$である。よって，線形写像$f:\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2$の表現行列Ａは１行１列の行列になる。つまり，Vergnaudの理論の条件のもとでは，線形写像の表現行列は１行１列で，ベクトルの成分も１つだから，$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}A=\boldsymbol{x}\times A$が成り立つことになり，関数演算子の乗法$f(x)=x\times a$と式の表現形式も同じになる。

以上のように，Vergnaudの理論における関数演算子の乗法は数ベクトル空間における線形写像に対応すると見ることができるので，関数演算子の乗法のベクトル空間における数学的な意味はベクトルに行列を適用する乗法である。そして，関数演算子の乗法$y=x\times a$に文字式の表現の約束を適用することで比例の式$y=ax$という表現になる。

４．比例の式の意味づけについての検討

⑴　数同士の乗法に基づいた意味づけの検討

３．⑴で示したように，比例の式$y=ax$は数値の対応を表していると見ることができた。そして，この場合の比例の式における乗法は体$\mathbb{R}$における数同士の乗法であった。この意味は，小学校算数科において比例の式が「yがxに比例するとき，xの値でそれに対応するyの値をわった商は，いつも決まった数になります。」，「yをxの式で表すと，次のようになります。y＝決まった数×x」（藤井ほか，2015）というように数値の対応関係として説明されていることの数学的な根拠となっているように見える。しかしながら，比例の式を数値の対応と見るためには前提として「量」の数学が必要になるが，宮下（2014）が「量」の数学の推

論は小学校算数科の指導内容になるものではないので，“教育的措置”として「量」の数学は小学校算数科では扱われないことになっていると述べているように，従来の指導では「量」の数学そのものは扱われていないので，「量」の数学を欠いたままでの小学校算数科における比例の式の説明は数学的な根拠が不明瞭なものと言える。

そこで，この乗法の意味に基づいた比例の式の数量同士の関係としての意味づけについて検討する。体ℝにおける数同士の乗法は体ℝにおける二項演算である。よって，比例の式における乗法$a \times x$においてaとxと$a \times x$を全て同じ種類の量として扱わなければならないことになる。しかしながら，それは比例が一般に異なる２つの量の関係を表していることと整合しない。従って，数値の対応を表す比例の式を数量同士の関係として意味づけることはできないと結論づけられることになる。

⑵　スカラー倍の乗法に基づいた意味づけの検討

３．⑵で示したように，比例の式$y=ax$は線形写像におけるスカラー倍を表しているとも見ることができた。これは「yはaのx倍の大きさ」ということであるから，比例の式における乗法$a \times x$を数量同士の関係として意味づけるならば，既習の乗法の意味「(基準量)×(割合)」によって意味づけられる。

この意味づけは既習の乗法の意味によって比例の式を特徴づけられるので，小学校算数科の指導内容に新しい指導内容を増やすことなく数学の体系を作ることができるというよさがある。しかしながら，この意味づけをした場合には比例定数aが「一方の数量の単位量に対応するもう一方の数量の大きさ」を意味することになるから，比例のより一般的な場合の関数である一次関数$y=ax+b$におけるaがグラフの傾き具合を表すということと不整合することになる。即ち，比例の式と一次関数の式で異なる式の意味づけが必要になる。

⑶　線形写像の乗法に基づいた意味づけの検討

３．⑶で示したように，比例の式$y=ax$は線形写像を表しているとも見ることができた。この場合には，比例の式は「測度空間M_1の測定数xに関数演算子「$\times a$」を適用することで$x \times a$により測度空間M_2の測定数yを求める。」という操作をしているので，その操作は「一方の測度空間の測定数をもう一方の測度空間の測定数に対応させる操作」として意味づけることができる。従って，渡会（2015）が比例の式の意味づけについて提案している単位変換の乗法・除法による意味づけは数学的にも妥当な数量同士の関係としての意味づけと言える。ただし，実際の意味づけの場面を想定すると，“単位変換”という表現が用いられるのは「3.6kgは何gか。」や「20cmは何mか。」といった同じ種類の数量の単位を変える場合に限られるから，比例の式の指導場面においては単位変換の意味づけからさらに「一方の数量の測定数をもう一方の数量の測定数に対応させる乗法・除法」というように意味の拡張をする必要がある。

また，関数演算子「$\times a$」は「２つの異なる次元の商を次元として持つ」と述べられていたから，関数演算子は小学校算数科の指導内容においては異種の２量の割合として捉えられる量に対応すると見ることができる。よって，比例の式の意味づけに伴って比例定数を異種の２量の割合として捉えられる量として意味づければ，比例のより一般的な場合の関数である一次関数$y=ax+b$の傾きaが（yの増加量）/（xの増加量）で定義される変化の割合によって意味づけられていることとも整合する。

以上のように，比例と一次関数の指導内容のつながりを観点とすると，比例の式をスカラー倍の乗法として意味づけた場合には比例定数と傾きで意味の不整合が生じたのに対して，線形写像の乗法として意味づけた場合には比例定数と傾きを一貫して異種の２量の割合として捉えられる量として意味づけることができる。また，線形写像の乗法によって意味づけをした場合には，異種の２量の割合として捉えられる量を“割合”と見ることで，比例の式における乗法を「(量)×(異種の２量の割合)」と表すことができる。従って，「(量)×(異種の２量の割合)」の乗法は「(基準量)×(割

合)」の乗法と同様に量に割合を適用する演算であることから，小学校算数科で学習する乗法の意味を「(量)×(割合)」で統合することにもつなげることができる。

5．まとめと今後の課題

本稿では，宮下（2014），杉山（2010），渡会（2015）における比例の式$y=ax$の見方をベクトル空間の数学において整理することで，それぞれの見方における比例の式の乗法の数学的な意味を数同士の乗法，スカラー倍の乗法，線形写像の乗法として特徴づけた。そして，①比例の式を数同士の乗法として見た場合には数量同士の関係としては意味づけられないこと，②比例の式をスカラー倍の乗法に基づいて意味づけた場合には比例の式の比例定数と一次関数の式の傾きの意味に不整合が生じること，③比例の式を線形写像の乗法に基づいて意味づけた場合には比例の式の比例定数と一次関数の式の傾きをともに異種の２量の割合として捉えられる量として意味づけることができるので，比例と一次関数の指導内容のつながりに不整合が生じないことを示した。

また，上述したように比例の式を数同士の乗法として見た場合には数量同士の関係としては意味づけられないことを述べたが，この論考は「量」の数学そのものを扱うことを前提とした場合のものであった。「量」の数学そのものは，宮下(2014)が述べるように小学校算数科の指導内容になるものではない。しかしながら，筆者は，小学校算数科において「量」の数学そのものを扱うことはできないものの，従来の指導内容には部分的に「量」の数学が扱われてきていると考える。それは演算の意味づけである。つまり，小学校算数科では数に対して定義されている演算に対して，数量の合併や「(基準量)×(割合)」といった数量に対する操作としての意味づけをすることにより，「量」の数学も扱っていると見ることができるのである。従って，１つの式を数の関係としても数量の関係としても見ることになるため，数の演算と数量の演算が混在することになってしまうのであるが，これは数量を扱うために数の演算に対して数量による意味づけをするという“教育的措置”を行った結果と言える。そのような視点で宮下（2014）とVergnaudの理論を枠組みとした渡会（2015）の研究を対比すると，宮下（2014）が現行の小学校算数科の指導には「量」の数学が教育的措置として扱われていないことを示したのに対して，渡会（2015）はその教育的措置を前提として，数量に対する操作によって演算の意味づけをするという別の教育的措置についての数学的な根拠を整理していると見ることができる。従って，宮下（2014）が量を要素とするベクトル空間において比例の式を数同士の乗法として特徴づけたのに対して，渡会（2015）は量の測定数を要素とするベクトル空間で比例の式を特徴づけているから，渡会（2015）が示した比例の式の単位変換による意味づけは，数同士の乗法に基づいて比例の式を意味づけるために教育的措置を施した結果の１つと見ることができる。

最後に，本稿では比例の式を線形写像に基づいて意味づけることの数学的な妥当性を示したが，実際の指導とその成果については検討していないので，その点について実証的に検討することが今後の課題である。

註

1．本稿は平成29年11月に開催された日本数学教育学会第50回秋期研究大会において口頭発表した内容について詳説及び修正したものである。(渡会陽平（2017）．比例の式$y=ax$における乗法の数学的な意味に関する研究．日本数学教育学会 第50回秋期研究大会発表集録，219-222.)

2．本稿は宮下（2014）に倣い，“数量”という用語を「数と量」ではなく「個数と量」の意味で用いる。

引用・参考文献

藤井斉亮ほか（2015）．新しい算数６．東京書籍．
川久保勝夫（1999）．線形代数学．日本評論社．
松坂和夫（1968）．集合・位相入門．岩波書店．

松坂和夫（1976）．代数系入門．岩波書店．
宮下英明（2014）．「比例」の数学と現行指導内容の対照 －「比例」がどのような主題なのかの確認のために－．日本数学教育学会誌，96(6)，4-11.
文部科学省（2008）．小学校学習指導要領解説 算数編 平成20年８月．東洋館出版社．
文部科学省・国立教育政策研究所（2016）．平成28年度全国学力・学習状況調査 報告書 中学校数学．
杉山吉茂（2010）．比例の定義について．日本数学教育学会誌，92(4)，2-6.
Vergnaud, G.（1983）. Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau（Eds.）, *Acquisition of mathematics concepts and processes*（pp. 127-175）. New York; Tokyo: Academic Press.
渡会陽平（2015）．算数科における比例の式に用いられる乗法についての量に対する操作による意味づけ．日本数学教育学会 第48回秋期研究大会発表集録，213-216.

（札幌校特任講師）